　（注）この科目には，選択問題があります。（3ページ参照。）

第1問　（必答問題）（配点　30）

〔1〕 O を原点とする座標平面上に点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ があり，P の座標 x，y は実数 θ を用いて

$$x = 2\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta) + 1$$
$$y = 2\sin\theta(\sin\theta - \cos\theta) + 2$$

と表されている。

(1) 2倍角の公式を用いると

$$x = \boxed{ア} + \left(\boxed{イ}\right)$$
$$y = \boxed{ウ} - \left(\boxed{エ}\right)$$

であるから，三角関数の合成により

$$x = \boxed{ア} + \sqrt{\boxed{オ}}\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{カ}}\right)$$
$$y = \boxed{ウ} - \sqrt{\boxed{オ}}\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{\boxed{カ}}\right)$$

と表される。

よって，点 P は中心 $\left(\boxed{ア},\ \boxed{ウ}\right)$，半径 $\sqrt{\boxed{オ}}$ の円 C の周上にある。

$\boxed{イ}$，$\boxed{エ}$ の解答群

⓪ $\sin 2\theta + \cos 2\theta$	① $\sin 2\theta - \cos 2\theta$	② $\cos 2\theta - \sin 2\theta$

（数学II・数学B 第1問は次ページに続く。）

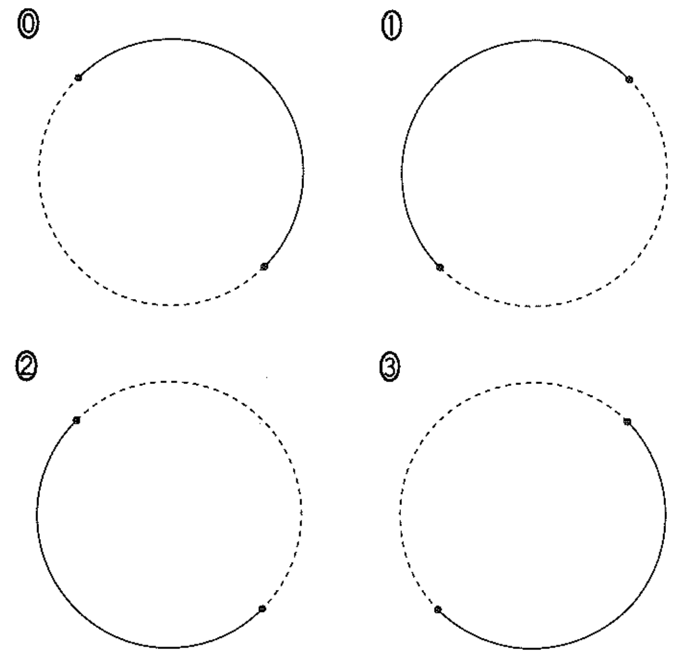
(2) θ が $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くものとする。このとき

$$2\theta + \frac{\pi}{\boxed{カ}} = 2\pi - t$$

とおく。$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi \leqq t \leqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$ であることに注意すると，点 P は (1) の円 C の図 $\boxed{サ}$ の実線部分を動く。

また，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，OP の最大値は $\sqrt{\boxed{シス}}$，最小値は $\sqrt{\boxed{セソ}} - \sqrt{\boxed{タ}}$ である。

$\boxed{サ}$ については，最も適当なものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。なお，x 軸，y 軸は省略しているが，x 軸は右方向，y 軸は上方向がそれぞれ正の方向である。



（数学II・数学B 第1問は次ページに続く。）

〔2〕

(1) 連立方程式

$$x+y=2 \quad \cdots\cdots ①$$

$$4^x+4^y=28 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす実数 x, y の値を求めよう。ただし，$x \leqq y$ とする。

$X=2^x$, $Y=2^y$ とおくと，① より

$$XY=\boxed{\text{チ}}$$

であり，これと ② より

$$X+Y=\boxed{\text{ツ}}$$

である。よって，X, Y の値を求めることにより，求める x, y の値は

$$x=\log_2\left(\boxed{\text{テ}}-\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

$$y=\log_2\left(\boxed{\text{テ}}+\sqrt{\boxed{\text{ト}}}\right)$$

である。

(数学II・数学B第1問は次ページに続く。)

(2) s, t を正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_{27}\dfrac{t}{\sqrt{s}} \geqq \dfrac{1}{3} \\ \log_{\sqrt{3}} s^3t^2 \leqq 16 \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

について考える。

$S=\log_3 s$, $T=\log_3 t$ とおくと，③ は

$$\begin{cases} T \geqq \dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}S+\boxed{\text{ヌ}} \\ T \leqq -\dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}S+\boxed{\text{ハ}} \end{cases} \quad \cdots\cdots ④$$

と変形できる。

したがって，④ を満たす S の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ である。

また，s, t が ③ を満たすとき，$\dfrac{t}{s}$ の最小値は $\sqrt[\boxed{\text{ヘ}}]{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

第2問 （必答問題） （配点　30）

〔1〕 a を実数として，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + (6a-3)x - a + 1$$

とする。このとき

$$f'(x) = 3\left(x^2 - \boxed{\text{ア}}\,ax + \boxed{\text{イ}}\,a - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

であり，$a = \boxed{\text{エ}}$ のとき，関数 $f(x)$ はつねに増加する。

（数学II・数学B 第2問は次ページに続く。）

(1)　$a = -1$ とする。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線が y 軸上の点 $(0,\ c)$ を通るとき

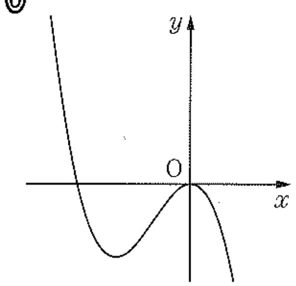
$$c = -\boxed{\text{オ}}\,t^3 - \boxed{\text{カ}}\,t^2 + \boxed{\text{キ}}$$

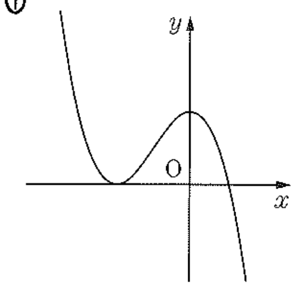
が成り立つ。

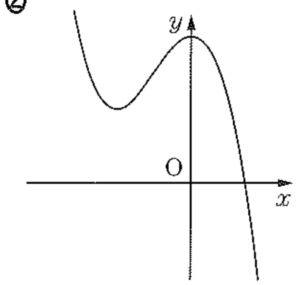
$y = -\boxed{\text{オ}}\,x^3 - \boxed{\text{カ}}\,x^2 + \boxed{\text{キ}}$ のグラフの概形は $\boxed{\text{ク}}$ である。

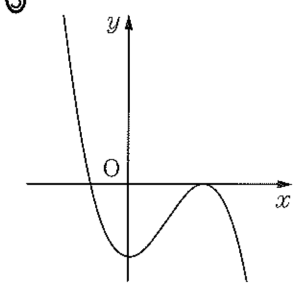
したがって，点 $(0,\ c)$ から曲線 $y = f(x)$ に 3 本の接線が引けるような c の値の範囲は $\boxed{\text{ケ}}$ である。

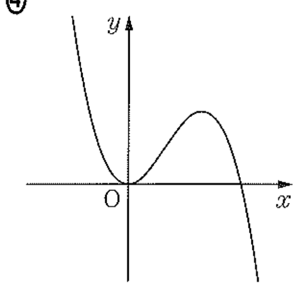
$\boxed{\text{ク}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

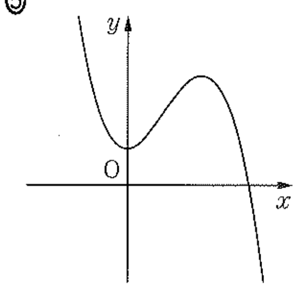
⓪


①


②


③


④


⑤


$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ $-1 < c < 0$	① $0 < c < 1$	② $1 < c < 2$	③ $2 < c < 3$
④ $-1 < c < 1$	⑤ $0 < c < 2$	⑥ $1 < c < 3$	⑦ $2 < c < 4$

（数学II・数学B 第2問は次ページに続く。）

(2) 太郎さんと花子さんは，x が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲を動くときの $f(x)$ の最大値について考えている。

太郎：3次関数の最大値を考えるときは，2次関数の場合と同じように，関数の増減を調べる必要があるね。

花子：そうだね。x の動く範囲とともに，極値をとるときの x の値を考えてみよう。

$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値を M とする。

$f'(x) = 0$ の解は $x = \boxed{\text{コ}}$，$\boxed{\text{サ}}a - \boxed{\text{シ}}$ であることに注意して

- $a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のとき，$M = f\left(\boxed{\text{ソ}}\right)$
- $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} < a < \boxed{\text{タ}}$ のとき，$M = f\left(\boxed{\text{チ}}\right)$
- $\boxed{\text{タ}} \leqq a$ のとき，$M = f\left(\boxed{\text{ツ}}\right)$

である。

最大値 M を a の関数と考えると，M を最小にする a の値は

$$a = \frac{\boxed{\text{テ}} - \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$$

である。

$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 0	① $\dfrac{1}{3}$	② $\dfrac{1}{2}$	③ $\dfrac{2}{3}$	④ 1
⑤ a	⑥ $2a$	⑦ $2a-1$	⑧ $3a-1$	⑨ $3a-2$

(数学II・数学B 第2問は次ページに続く。)

〔2〕 a，b を，$a > 2$，$b < 0$ を満たす実数とする。$f(x) = x^2$ とおき，曲線 $y = f(x)$ を C とする。

C 上の2点 $(0,\ 0)$，$(2,\ 4)$ を通る直線を ℓ とすると，ℓ の方程式は

$$y = \boxed{\text{ニ}}\,x$$

である。

$b \leqq x \leqq 0$ において，C と ℓ および直線 $x = b$ で囲まれた図形の面積を S_1，$0 \leqq x \leqq 2$ において，C と ℓ で囲まれた図形の面積を S_2，$2 \leqq x \leqq a$ において，C と ℓ および直線 $x = a$ で囲まれた図形の面積を S_3 とする。

このとき

$$S_1 = \int_b^0 \left\{\boxed{\text{ヌ}}\right\} dx$$

$$S_2 = \int_0^2 \left\{\boxed{\text{ネ}}\right\} dx$$

$$S_3 = \int_2^a \left\{\boxed{\text{ノ}}\right\} dx$$

であり

$$S_3 - S_2 = \int_{\boxed{\text{ヒ}}}^{\boxed{\text{ハ}}} \left\{f(x) - \boxed{\text{ニ}}\,x\right\} dx$$

である。

$\boxed{\text{ヌ}}$ ～ $\boxed{\text{ノ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $f(x) - \boxed{\text{ニ}}\,x$	① $\boxed{\text{ニ}}\,x - f(x)$

(1) $S_3 = S_2$ となるような a の値は $a = \boxed{\text{フ}}$ である。

(2) $S_1 = \dfrac{1}{2}S_2$ となるような b の値は $b = \boxed{\text{ヘ}} - \sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

 第3問〜第5問は，いずれか2問を選択し，解答しなさい。

第4問 （選択問題）（配点 20）

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を自然数とし，座標平面上で，三つの不等式

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0, \quad y \leqq \log_2(2^n - x)$$

によって表される領域を D_n とする。

太郎さんと花子さんは，次の問題について話している。

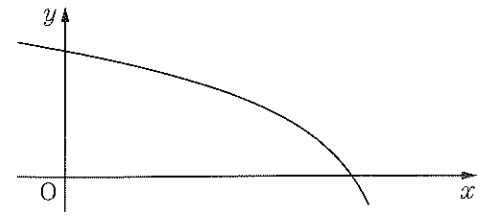
> 問題　領域 D_n に含まれる格子点の個数を求めよ。

太郎：$y = \log_2(2^n - x)$ のグラフがよくわからないよ。

花子：とりあえず，$n = 3$ として，グラフ表示ソフトを使ってグラフを表示してみようよ。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，$y = \log_2(2^3 - x)$ のグラフを表示させると，次のようなグラフが表示された。



(1)　$n = 3$ の場合を考える。D_3 に含まれる格子点の個数を求めよう。

曲線 $y = \log_2(2^3 - x)$ と x 軸との交点の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ 0\right)$，$y$ 軸との交点の座標は $\left(0,\ \boxed{\text{イ}}\right)$ である。

D_3 に含まれる格子点で，x 軸上にある格子点の個数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個，直線 $y = 1$ 上にある格子点の個数は $\boxed{\text{エ}}$ 個である。

したがって，D_3 に含まれる格子点の個数は $\boxed{\text{オカ}}$ 個である。

（数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。）

(2)　D_n に含まれる格子点の個数を求めよう。

曲線 $y=\log_2(2^n-x)$ と x 軸との交点の座標は $\left(\boxed{キ},\ 0\right)$ であり，y 軸との交点の座標は $\left(0,\ \boxed{ク}\right)$ である。

整数 k が $0 \leqq k \leqq \boxed{ク}$ を満たすとき，D_n に含まれる格子点で y 座標が k である点は $\left(\boxed{ケ}\right)$ 個ある。

よって，D_n に含まれる格子点の個数を n を用いて表すと

$$\sum_{k=0}^{\boxed{ク}}\left(\boxed{ケ}\right)=\left(\boxed{コ}\right)\times 2^n+n+\boxed{サ}$$

である。

このうち，D_n の周上を除く内部に含まれる格子点の個数は

$$\left(\boxed{シ}\right)\times 2^n-n+\boxed{ス} \quad (n \geqq 2)$$

である。

$\boxed{キ}$，$\boxed{ク}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $n-1$	① n	② $n+1$	③ 2^n-1	④ 2^n	⑤ 2^n+1

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ $n-k-1$	① $n-k$	② $n-k+1$
③ 2^k-1	④ 2^k	⑤ 2^k+1
⑥ 2^n-2^k-1	⑦ 2^n-2^k	⑧ 2^n-2^k+1

$\boxed{コ}$，$\boxed{シ}$ の解答群

⓪ $n-2$	① $n-1$	② n	③ $n+1$	④ $n+2$

(下 書 き 用 紙)

数学II・数学Bの試験問題は次に続く。

第5問 （選択問題）（配点 20）

Oを原点とする座標空間に，3点 $A(-3,\ 1,\ 2)$，$B(1,\ 2,\ 4)$，$C(-1,\ -1,\ -1)$ がある。

(1) $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{\boxed{アイ}}$，$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\boxed{ウエ}}$，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{オ}$ であり，△OAB の面積は $\dfrac{\boxed{カ}\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$ である。

また，三つの角 ∠AOB，∠BOC，∠COA のうち，最も大きいものは $\boxed{ケ}$ である。

$\boxed{ケ}$ の解答群

⓪ ∠AOB	① ∠BOC	② ∠COA

(2) 線分 OA の中点を D，線分 OC を 1 : 2 に内分する点を E とする。直線 AB 上に点 P，直線 BC 上に点 Q をとり，p，q を実数として

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CQ} = q\overrightarrow{CB} \qquad \cdots\cdots ①$$

とおく。

（数学II・数学B 第5問は次ページに続く。）

(i) 太郎さんと花子さんは，直線 DP と直線 EQ が平行になる場合を考えている。

> 太郎：直線 DP と直線 EQ が平行になることはあるのかな。
> 花子：調べてみよう。

① より

$$\overrightarrow{DP} = \left(\boxed{コ}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\boxed{サ}\right)\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{EQ} = \left(\boxed{シ}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\boxed{ス}\right)\overrightarrow{OC}$$

と表されるから，$p = \boxed{セ}$，$q = \boxed{ソ}$ のとき直線 DP と直線 EQ は平行になる。

$\boxed{コ}$ 〜 $\boxed{ス}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ p	① $p-\frac{1}{2}$	② $\frac{1}{2}-p$	③ $p-\frac{1}{3}$	④ $\frac{1}{3}-p$
⑤ q	⑥ $q-\frac{1}{3}$	⑦ $\frac{1}{3}-q$	⑧ $q-\frac{2}{3}$	⑨ $\frac{2}{3}-q$

$\boxed{セ}$，$\boxed{ソ}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ 0	① $\frac{1}{3}$	② $\frac{1}{2}$	③ $\frac{2}{3}$	④ 1

（数学II・数学B 第5問は次ページに続く。）

(ii) $q=\dfrac{1}{3}$ のとき，4点D，E，P，Qが同一平面上にあるような p の値を求めてみよう。

点Pが平面DEQ上にあるとき，実数 s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DE}}+t\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$$

と表すことができるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は s，t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\boxed{\text{タ}}-s-t}{\boxed{\text{チ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{\boxed{\text{ツ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{s+\boxed{\text{テ}}\,t}{\boxed{\text{ト}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

と表される。点Pは直線AB上にあるので

$$s=-\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad t=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

であり，このとき $p=\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ である。

$p=\dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$，$q=\dfrac{1}{3}$ のとき，直線DPと直線EQのなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\boxed{\text{ヒ}}\sqrt{15}}{\boxed{\text{フヘ}}}$$

である。