

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1] 次の問題について考えよう。

問題 $\angle BCA = \frac{\pi}{3}$ である三角形 ABC の外接円の半径を R , 内接円の半径を r とする。 $\frac{r}{R}$ のとり得る値の範囲を求めよ。

$\angle CAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ とする。

三角形 ABC に正弦定理を用いると

$$AB = \sqrt{\boxed{\text{ア}}} R \dots\dots\dots \text{①}$$

が成り立つ。

また、三角形 ABC の内接円の中心 I から辺 AB へ下ろした垂線を IH とする。線分 AH の長さを r と α を用いて表すと $AH = \boxed{\text{イ}}$ である。

$\boxed{\text{イ}}$ の解答群

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| ① $r \sin \alpha$ | ② $r \cos \alpha$ | ③ $r \tan \alpha$ |
| ④ $\frac{r}{\sin \alpha}$ | ⑤ $\frac{r}{\cos \alpha}$ | ⑥ $\frac{r}{\tan \alpha}$ |

よって、辺 AB の長さを r と α , β を用いて表すと

$$AB = \boxed{\text{ウ}} \dots\dots\dots \text{②}$$

となる。

$\boxed{\text{ウ}}$ の解答群

- | | | |
|--|--|--|
| ① $r(\sin \alpha + \sin \beta)$ | ② $r(\cos \alpha + \cos \beta)$ | ③ $r(\tan \alpha + \tan \beta)$ |
| ④ $r\left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta}\right)$ | ⑤ $r\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta}\right)$ | ⑥ $r\left(\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta}\right)$ |

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

を用いると、①, ② から $\frac{r}{R}$ は α を用いて次のように表せる。

$$\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \boxed{\text{エ}} \sin \alpha \sin \left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi - \alpha \right) \\ &= \frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}} \sin 2\alpha + \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}} \cos 2\alpha - \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \\ &= \sin \left(2\alpha + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \pi \right) - \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \end{aligned}$$

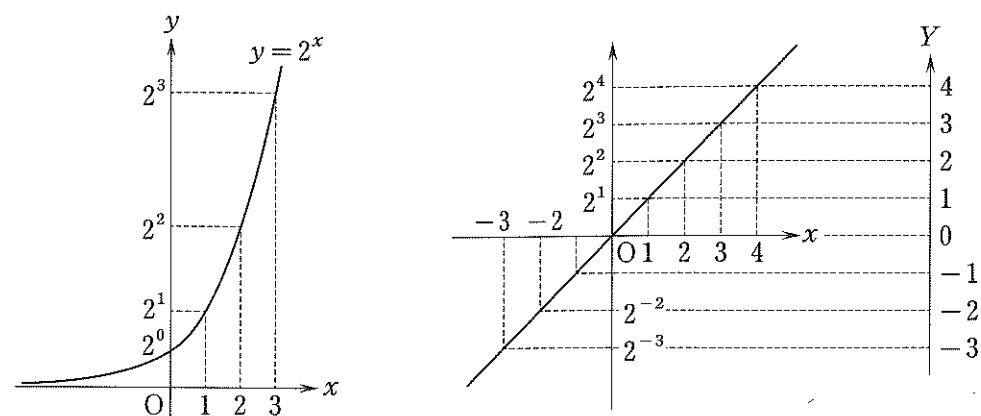
したがって、 $\frac{r}{R}$ のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < \frac{r}{R} \leq \boxed{\text{タ}}$ である。

$\boxed{\text{ソ}}$, $\boxed{\text{タ}}$ の解答群

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| ① 0 | ② $\frac{1}{4}$ | ③ $\frac{1}{3}$ |
| ④ $\frac{1}{2}$ | ⑤ $\frac{2}{3}$ | ⑥ $\frac{3}{4}$ |

(数学Ⅱ・数学B 第1問 は次ページに続く。)

[2]



関数 $y=2^x$ では x の値がある程度大きくなると y の値が大きくなりすぎて、方眼紙にグラフを描くとすぐに紙からはみ出してしまう(左上の図)。そこで方眼紙に書いた縦軸目盛りを右上の図のように読み替えてグラフを描くことを考える。

右上の図の縦軸を新たに Y 軸としよう。すると正の数 y に対して

$$Y = \log_2 y \quad \text{..... ③}$$

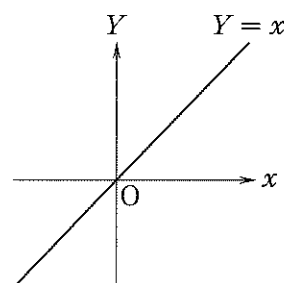
により実数 Y を定めたことになっている。

例えば $y=2^x$ を ③ に代入すると

$$Y = \log_2 2^x = x$$

となるので、関数 $y=2^x$ から右の図のような直線が得られる。

他の関数もこの xY 平面に表してみよう。



(1) 関数 $y=4^x$ について、③により x と Y の関係式を求めると

$$Y = \boxed{\text{チ}} x$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B 第1問は次ページに続く。)

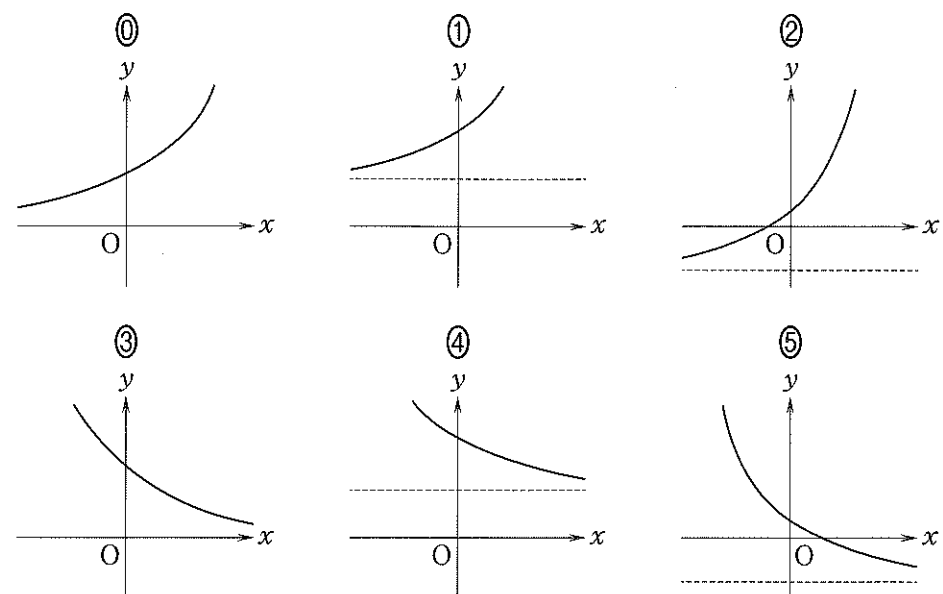
(2) 関数 $y=3^x$ を xY 平面に表すと原点を通る直線となる。その直線の傾きを、小数第2位を四捨五入して表すと $\boxed{\text{ツ}}.\boxed{\text{テ}}$ となる。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(3) 関数 $y=f(x)$ を xY 平面に表すと直線 $Y=2-x$ となった。

曲線 $y=f(x)$ を xy 平面に表すと $\boxed{\text{ト}}$ のようになる。

$\boxed{\text{ト}}$ については、最も適当なものを、次の ①～⑤のうちから一つ選べ。



(4) 関数 $y=4^x$ を xY 平面に表すと直線 ℓ となり、関数 $y=g(x)$ を xY 平面に表すと原点を通る直線 m となるとする。

$\ell \perp m$ であるとき $g(x) = \boxed{\text{ナ}}$ となる。

$\boxed{\text{ナ}}$ の解答群

- | | | |
|------------------|---------------------------------------|---------------------------------|
| ① $-\frac{x}{2}$ | ② $x\sqrt{2}$ | ③ $x \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ |
| ④ 2^{-2x} | ⑤ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$ | ⑥ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ |

第2問 (必答問題) (配点 30)

[1] 座標平面上で3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 3$ (a, b, c は実数, $a \neq 0$) のグラフを考える。

$f(x)$ は次の条件を満たしている。

条件

- ・ $0 \leq x < 1$ のとき $f'(x) < 0$, $f'(1) = 0$ である。
- ・ $y = f'(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積は2である。

$f'(1) = 0$ から $\boxed{\text{ア}}$ $a + \boxed{\text{イ}}$ $b + c = 0$ が成り立つ。

また, $y = f'(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積が2であることから, $a + b + c = \boxed{\text{ウエ}}$ を得る。

したがって, b と c を a を用いて表すと

$$b = \boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}} a, \quad c = a - \boxed{\text{キ}}$$

となる。

(数学Ⅱ・数学B 第2問 は次ページに続く。)

よって

$$f(x) = ax^3 + (\boxed{\text{オ}} - \boxed{\text{カ}} a)x^2 + (a - \boxed{\text{キ}})x + 3$$

であり, $0 \leq x < 1$ のとき $f'(x) < 0$ であることから, a のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{クケ}} \leq a < 0, \quad 0 < a < \boxed{\text{コ}}$$

となる。

この範囲に異なる二つの a の値 a_1, a_2 ($a_1 > a_2$) をとって固定する。さらに

$a = a_1$ のときの $f(x)$ を $f_1(x)$

$a = a_2$ のときの $f(x)$ を $f_2(x)$

とする。

$$f_1(x) - f_2(x) = (a_1 - a_2)x(x - \boxed{\text{サ}})^2$$

であり, $0 \leq x \leq 1$ において $f_1(x) - f_2(x)$ の値が最大となるのは, 二つの定

数 a_1, a_2 の値のとり方によらず $x = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ のときである。

(数学Ⅱ・数学B 第2問 は次ページに続く。)

[2] p を実数の定数とし、

$$g(x) = x^3 - 3(p+1)x^2 + 3p(p+2)x$$

とする。また、座標平面上で曲線 $y = g(x)$ を C とする。

$g(x)$ が極大となる点を A 、極小となる点を B とする。 A 、 B の座標を p を用いて表すと、

$$A(\text{セ}, \text{ソ}), \quad B(\text{タ}, \text{チ})$$

である。

セ ～ チ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

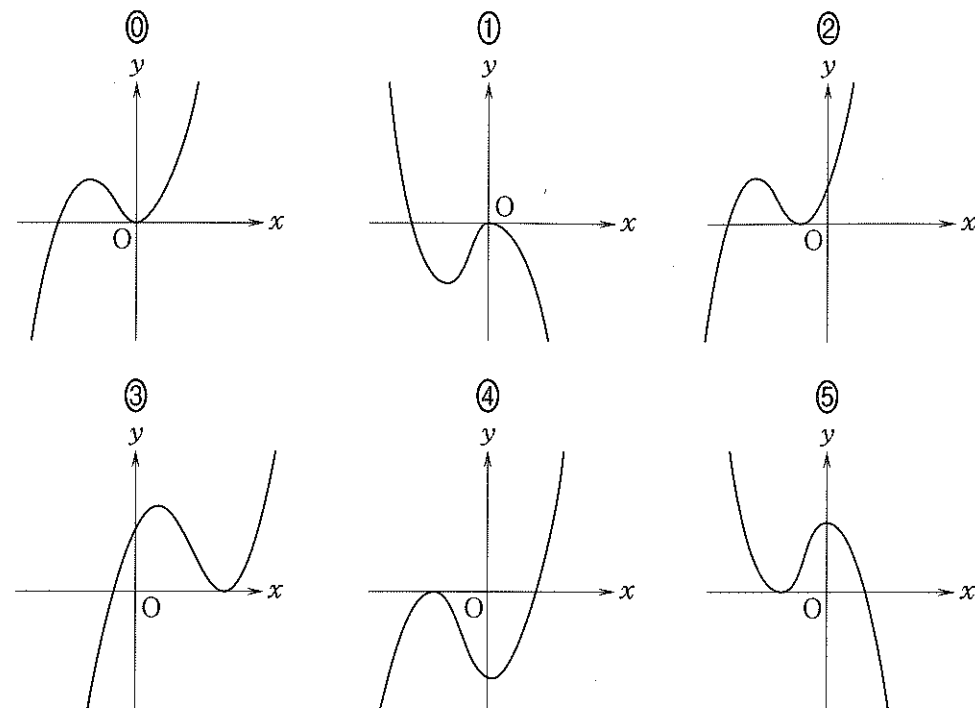
- | | |
|-----------------------|----------------|
| ① p | ① $-p$ |
| ② $p+2$ | ③ $-(p+2)$ |
| ④ p^3+3p^2 | ⑤ $-7p^3-9p^2$ |
| ⑥ $(p+2)^3+3(p+2)^2$ | ⑦ p^3+3p^2-4 |
| ⑧ $-(p+2)^3-3(p+2)^2$ | |

p が変化するとき、座標平面上で A が描く曲線を C_1 、 B が描く曲線を C_2 とする。

(数学Ⅱ・数学B 第2問 は次ページに続く。)

C_1 の概形は ツ である。

ツ については、最も適当なものを、次の ①～⑤ のうちから一つ選べ。



また、 C_2 は C_1 を x 軸方向に テ 、 y 軸方向に トナ だけ平行移動して得られる曲線である。よって、 p が $0 \leq p \leq 1$ を満たして変化するとき、線分 AB が通過する領域の面積は ニヌ である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

整式の列 $\{f_n(x)\}$ は、初項 $f_1(x)$ が $x^2 - x + 1$ であり、

$$f_{n+1}(x) = (x+1)f_n(x) - 2(x-1) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。

(1) $f_2(x) = x^3 - \boxed{\text{ア}}x + \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $a_n = f_n(0)$, $b_n = f_n(1)$, $c_n = f_n(2)$ とおくと、 $n=1, 2, 3, \dots$ のとき

$$a_{n+1} = a_n + \boxed{\text{ウ}}$$

$$b_{n+1} = \boxed{\text{エ}} b_n$$

$$c_{n+1} = \boxed{\text{オ}} c_n - \boxed{\text{カ}}$$

が成り立つ。

したがって

$$a_n = \boxed{\text{キ}} n - \boxed{\text{ク}}$$

$$c_n = \boxed{\text{ケ}} \cdot \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}}$$

である。

$\boxed{\text{サ}}$ の解答群

- ① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

(数学Ⅱ・数学B 第4問 は次ページに続く。)

(3) 整式 $f_n(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは、自然数 n の値にかかわらず

$\boxed{\text{ス}}$ に等しい。

$\boxed{\text{ス}}$ の解答群

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| ① a_n | ② b_n | ③ c_n |
| ④ $a_n - 1$ | ⑤ $b_n - 1$ | ⑥ $c_n - 1$ |
| ⑦ $a_n - 2$ | ⑧ $b_n - 2$ | ⑨ $c_n - 2$ |

(4) 整式 $f_n(x)$ を $x(x-2)$ で割ったときの余りを $px+q$ とすると

$$p = \boxed{\text{セ}} \boxed{\text{ソ}} - n + \boxed{\text{タ}}$$

$$q = \boxed{\text{チ}} n - \boxed{\text{ツ}}$$

である。

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

- ① $n-2$ ② $n-1$ ③ n ④ $n+1$ ⑤ $n+2$

(5) $g_n(x) = f_1(x) + 2f_2(x) + 3f_3(x) + \dots + nf_n(x)$ とおく。整式 $g_n(x)$ を x で割ったときの余りを r とすると

$$r = \frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}} n(n+1) (\boxed{\text{ナ}} n - 1)$$

である。

第5問 (選択問題) (配点 20)

4点O, A, B, Cを頂点とする四面体OABCがある。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ として

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1}{2}$$

であるとする。

このとき、 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = \boxed{\text{ア}}$ であり、三角形OBCの面積は

$$\frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}} \text{である。}$$

いま、点Dを $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ となるようにとる。

$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{エオ}} \vec{a} + \boxed{\text{カ}} \vec{b} + \vec{c}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B 第5問 は次ページに続く。)

3点O, B, Cを通る平面を α とし、 α 上に点Hをとると、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH} = s\vec{b} + t\vec{c}$ と表すことができる。すると $\overrightarrow{DH}$ は

$$\overrightarrow{DH} = \boxed{\text{キ}} \vec{a} + (s - \boxed{\text{ク}}) \vec{b} + (t - \boxed{\text{ケ}}) \vec{c}$$

と表せる。 $\overrightarrow{DH} \cdot \vec{b} = 0$ かつ $\overrightarrow{DH} \cdot \vec{c} = 0$ となるような s, t の値は $s = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$,

$t = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。このときの点Hを H_0 とすると

$$\overrightarrow{DH_0} = \boxed{\text{キ}} \vec{a} - \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \vec{b} - \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \vec{c}$$

となり、 $|\overrightarrow{DH_0}| = \frac{\boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}}}{\boxed{\text{ト}}}$ である。

また、四面体OBCDの体積は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。