練習，EXERCISES，総合演習の解答（数学I）

注意　・章ごとに，練習，EXERCISES の解答をまとめて扱った。
・問題番号の左横の数字は，難易度を表したものである。

練習 ①1　(1) 多項式 $-2x+3y+x^2+5x-y$ の同類項をまとめよ。
(2) 次の多項式において，[ ] 内の文字に着目したとき，その次数と定数項をいえ。
(ア) $x-2xy+3y^2+4-2x-7xy+2y^2-1$　[y]
(イ) $a^2b^2-ab+3ab-2a^2b^2+7c^2+4a-5b-3a+1$　[b]，[a と b]

(1) $-2x+3y+x^2+5x-y=(-2x+5x)+(3y-y)+x^2$　←同類項を集める。
$=(-2+5)x+(3-1)y+x^2$　←同類項をまとめる。
$=\boldsymbol{x^2+3x+2y}$　←降べきの順に整理。

(2) (ア) $x-2xy+3y^2+4-2x-7xy+2y^2-1$
$=(3y^2+2y^2)+(-2xy-7xy)+(x-2x)+(4-1)$　←同類項を集める。
$=(3+2)y^2+(-2-7)xy+(1-2)x+3$　←同類項をまとめる。
$=5y^2-9xy-x+3$
y に着目すると　**次数 2，定数項 $-x+3$**　←y 以外の文字は数と考える。

(イ) $a^2b^2-ab+3ab-2a^2b^2+7c^2+4a-5b-3a+1$
$=(a^2b^2-2a^2b^2)+(-ab+3ab)+7c^2+(4a-3a)-5b+1$　←同類項を集める。
$=(1-2)a^2b^2+(-1+3)ab+7c^2+(4-3)a-5b+1$　←同類項をまとめる。
$=-a^2b^2+2ab+7c^2+a-5b+1$ …… ①
また，b について，降べきの順に整理すると　←b 以外の文字は数と考える。
$-a^2b^2+(2a-5)b+7c^2+a+1$
よって，b に着目すると　**次数 2，定数項 $7c^2+a+1$**
a と b に着目すると　① から　次数 4，定数項 $7c^2+1$　←a^2b^2 は，a を 2 個，b を 2 個掛け合わせているから，a と b に着目すると 4 次。

練習 ②2　$A=-2x^3+4x^2y+5y^3$，$B=x^2y-3xy^2+2y^3$，$C=3x^3-2x^2y$ であるとき，次の計算をせよ。
(1) $3(A-2B)-2(A-2B-C)$　　(2) $3A-2\{(2A-B)-(A-3B)\}-3C$

(1) $3(A-2B)-2(A-2B-C)$
$=3A-6B-2A+4B+2C=A-2B+2C$
$=(-2x^3+4x^2y+5y^3)-2(x^2y-3xy^2+2y^3)+2(3x^3-2x^2y)$
$=-2x^3+4x^2y+5y^3-2x^2y+6xy^2-4y^3+6x^3-4x^2y$
$=\boldsymbol{4x^3-2x^2y+6xy^2+y^3}$

←縦書きの計算
$$\begin{array}{rrrrr} & -2x^3 & +4x^2y & & +5y^3 \\ & & -2x^2y & +6xy^2 & -4y^3 \\ +) & 6x^3 & -4x^2y & & \\ \hline & 4x^3 & -2x^2y & +6xy^2 & +\ y^3 \end{array}$$

(2) $3A-2\{(2A-B)-(A-3B)\}-3C$　←内側の括弧から ( )，{ } の順にはずす。
$=3A-2(2A-B-A+3B)-3C=3A-2(A+2B)-3C$
$=3A-2A-4B-3C=A-4B-3C$　←A, B, C について整理。
$=(-2x^3+4x^2y+5y^3)-4(x^2y-3xy^2+2y^3)-3(3x^3-2x^2y)$　←A, B, C の各式を代入。
$=-2x^3+4x^2y+5y^3-4x^2y+12xy^2-8y^3-9x^3+6x^2y$
$=\boldsymbol{-11x^3+6x^2y+12xy^2-3y^3}$　←x の降べきの順に整理。

練習 ①3 次の計算をせよ。

(1) $(-ab)^2(-2a^3b)$　(2) $(-2x^4y^2z^3)(-3x^2y^2z^4)$

(3) $2a^2bc(a-3b^2+2c)$　(4) $(-2x)^3(3x^2-2x+4)$

(1) $(-ab)^2(-2a^3b)=(-1)^2a^2b^2\times(-2a^3b)=1\cdot(-2)a^{2+3}b^{2+1}$

$=\mathbf{-2a^5b^3}$

(2) $(-2x^4y^2z^3)(-3x^2y^2z^4)=(-2)\cdot(-3)x^{4+2}y^{2+2}z^{3+4}=\mathbf{6x^6y^4z^7}$

(3) $2a^2bc(a-3b^2+2c)$

$=2a^2bc\cdot a+2a^2bc\cdot(-3b^2)+2a^2bc\cdot 2c$

$=\mathbf{-6a^2b^3c+2a^3bc+4a^2bc^2}$

(4) $(-2x)^3(3x^2-2x+4)=-8x^3(3x^2-2x+4)$

$=-8x^3\cdot 3x^2-8x^3\cdot(-2x)-8x^3\cdot 4$

$=\mathbf{-24x^5+16x^4-32x^3}$

←指数法則
m, n が自然数のとき
$a^ma^n=a^{m+n}$,
$(a^m)^n=a^{mn}$,
$(ab)^n=a^nb^n$

←分配法則

←次数の高い順に。

←$(-2x)^3=(-2)^3\cdot x^3$
$=-8x^3$

練習 ①4 次の式を展開せよ。

(1) $(2a+3b)(a-2b)$　(2) $(2x-3y-1)(2x-y-3)$

(3) $(2a-3b)(a^2+4b^2-3ab)$　(4) $(3x+x^3-1)(2x^2-x-6)$

(1) $(2a+3b)(a-2b)=2a(a-2b)+3b(a-2b)$

$=2a^2-4ab+3ab-6b^2$

$=\mathbf{2a^2-ab-6b^2}$

(2) $(2x-3y-1)(2x-y-3)$

$=2x(2x-y-3)-3y(2x-y-3)-(2x-y-3)$

$=4x^2-2xy-6x-6xy+3y^2+9y-2x+y+3$

$=\mathbf{4x^2-8xy+3y^2-8x+10y+3}$

(3) $(2a-3b)(a^2+4b^2-3ab)$

$=2a(a^2+4b^2-3ab)-3b(a^2+4b^2-3ab)$

$=2a^3+8ab^2-6a^2b-3a^2b-12b^3+9ab^2$

$=\mathbf{2a^3-9a^2b+17ab^2-12b^3}$

(4) $(3x+x^3-1)(2x^2-x-6)$

$=3x(2x^2-x-6)+x^3(2x^2-x-6)-(2x^2-x-6)$

$=6x^3-3x^2-18x+2x^5-x^4-6x^3-2x^2+x+6$

$=\mathbf{2x^5-x^4-5x^2-17x+6}$

別解 (3)

$$
\begin{array}{rrrr}
 & a^2 & -3ab & +4b^2 \\
\times) & 2a & -3b & \\
\hline
2a^3 & -6a^2b & +8ab^2 & \\
 & -3a^2b & +9ab^2 & -12b^3 \\
\hline
\mathbf{2a^3} & \mathbf{-9a^2b} & \mathbf{+17ab^2} & \mathbf{-12b^3}
\end{array}
$$

(4)

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & x^3 & \underset{\sim\sim}{} & +3x & -1 \\
\times) & & 2x^2 & -x & -6 & \\
\hline
2x^5 & & +6x^3 & -2x^2 & & \\
 & -x^4 & & -3x^2 & +x & \\
 & & -6x^3 & & -18x & +6 \\
\hline
\mathbf{2x^5} & \mathbf{-x^4} & & \mathbf{-5x^2} & \mathbf{-17x} & \mathbf{+6}
\end{array}
$$

←分配法則

←同類項 □ab をまとめる。

←降べきの順に整理。

←縦書きの計算も便利。別解 参照。

←降べきの順に整理。

←a の降べきの順に書く。項数の多い式を上に。

←同類項は縦にそろえる。

←欠けている次数の項, すなわち 2 次の項はあけておく(﹏の部分)。

練習 ①5 次の式を展開せよ。

(1) $(3x+5y)^2$　(2) $(a^2+2b)^2$　(3) $(3a-2b)^2$

(4) $(2xy-3)^2$　(5) $(2x-3y)(2x+3y)$　(6) $(3x-4y)(5y+4x)$

(1) $(3x+5y)^2=(3x)^2+2\cdot 3x\cdot 5y+(5y)^2$

$=\mathbf{9x^2+30xy+25y^2}$

(2) $(a^2+2b)^2=(a^2)^2+2\cdot a^2\cdot 2b+(2b)^2$

$=\mathbf{a^4+4a^2b+4b^2}$

(3) $(3a-2b)^2=(3a)^2-2\cdot 3a\cdot 2b+(2b)^2$

$=\mathbf{9a^2-12ab+4b^2}$

(4) $(2xy-3)^2=(2xy)^2-2\cdot 2xy\cdot 3+3^2$

$=\mathbf{4x^2y^2-12xy+9}$

(5) $(2x-3y)(2x+3y)=(2x+3y)(2x-3y)=(2x)^2-(3y)^2$

$=\mathbf{4x^2-9y^2}$

(6) $(3x-4y)(5y+4x)=(3x-4y)(4x+5y)$

$=3\cdot 4x^2+\{3\cdot 5+(-4)\cdot 4\}xy+(-4)\cdot 5y^2$

$=\mathbf{12x^2-xy-20y^2}$

参考 解答の 2 行目を次のようにしてもよい。

$=3\cdot 4x^2+\{3\cdot 5y+(-4y)\cdot 4\}x+(-4y)\cdot 5y$

←$(a+b)^2$
$=a^2+2ab+b^2$

←$(a-b)^2$
$=a^2-2ab+b^2$

←$(a+b)(a-b)$
$=a^2-b^2$

←$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

練習 ①6 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$　(2) $(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)$　(3) $(2x+1)^3$　(4) $(3x-2y)^3$

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)=(x+2)(x^2-x\cdot 2+2^2)=x^3+2^3$

$=\mathbf{x^3+8}$

(2) $(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)=(2p-q)\{(2p)^2+2p\cdot q+q^2\}$

$=(2p)^3-q^3=\mathbf{8p^3-q^3}$

(3) $(2x+1)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot 1+3\cdot 2x\cdot 1^2+1^3$

$=\mathbf{8x^3+12x^2+6x+1}$

(4) $(3x-2y)^3=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$

$=\mathbf{27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3}$

←$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$

←$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

←$(a+b)^3$
$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

←$(a-b)^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

練習 ②7 次の式を展開せよ。

(1) $(a+3b-c)^2$　(2) $(x+y+7)(x+y-7)$

(3) $(x-3y+2z)(x+3y-2z)$　(4) $(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)$

(1) $(a+3b-c)^2=\{a+(3b-c)\}^2=a^2+2a(3b-c)+(3b-c)^2$

$=a^2+6ab-2ac+9b^2-6bc+c^2$

$=\mathbf{a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca}$

別解 $(a+3b-c)^2=\{a+3b+(-c)\}^2$

$=a^2+(3b)^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot 3b+2\cdot 3b(-c)+2(-c)a$

$=\mathbf{a^2+9b^2+c^2+6ab-6bc-2ca}$

(2) $(x+y+7)(x+y-7)=\{(x+y)+7\}\{(x+y)-7\}$

$=(x+y)^2-7^2$

$=\mathbf{x^2+2xy+y^2-49}$

←$3b-c=X$ とおくと
$(a+X)^2=a^2+2aX+X^2$

←$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2$
$+2ab+2bc+2ca$

←$x+y=A$ とおくと
$(A+7)(A-7)=A^2-7^2$

(3) $(x-3y+2z)(x+3y-2z)=\{x-(3y-2z)\}\{x+(3y-2z)\}$
$=x^2-(3y-2z)^2$
$=\boldsymbol{x^2-9y^2-4z^2+12yz}$

←$3y$, $2z$ の符号に注目。
$3y-2z=A$ とおくと
$(x-A)(x+A)=x^2-A^2$

(4) $(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)=\{(x^2+1)-3x\}\{(x^2+1)+4x\}$
$=(x^2+1)^2+x(x^2+1)-12x^2$
$=(x^4+2x^2+1)+x^3+x-12x^2$
$=\boldsymbol{x^4+x^3-10x^2+x+1}$

←$x^2+1=A$ とおくと
$(A-3x)(A+4x)$
$=A^2+xA-12x^2$
←降べきの順に整理。

練習 ②8 次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)(x-3)(x^2+9)$　(2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$
(3) $(a+b)^3(a-b)^3$　(4) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

(1) $(x+3)(x-3)(x^2+9)=(x^2-9)(x^2+9)=(x^2)^2-9^2$
$=\boldsymbol{x^4-81}$

←$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)=(x-1)(x+1)\times(x-2)(x+2)$
$=(x^2-1)\times(x^2-4)$
$=(x^2)^2-5x^2+4$
$=\boldsymbol{x^4-5x^2+4}$

←掛ける順序を工夫。
←$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

(3) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$
$=(a^2)^3-3(a^2)^2b^2+3a^2(b^2)^2-(b^2)^3$
$=\boldsymbol{a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6}$

←$A^3B^3=(AB)^3$
←$(a-b)^3$
$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(4) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$
$=(x-1)(x^2+x+1)\times(x+3)(x^2-3x+9)$
$=(x^3-1)(x^3+27)$
$=(x^3)^2+26x^3-27$
$=\boldsymbol{x^6+26x^3-27}$

←$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$=a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2)$
$=a^3-b^3$

練習 ③9 次の式を展開せよ。

(1) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)$　(2) $(x+8)(x+7)(x-3)(x-4)$
(3) $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$
(4) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$

(1) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)$
$=\{(x-2)(x+5)\}\times\{(x+1)(x+2)\}$
$=\{(x^2+3x)-10\}\times\{(x^2+3x)+2\}$
$=(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20$
$=x^4+6x^3+9x^2-8x^2-24x-20$
$=\boldsymbol{x^4+6x^3+x^2-24x-20}$

←定数項に注目。
$-2+5=3$, $1+2=3$
←$x^2+3x=A$ とおくと
$(A-10)(A+2)$
$=A^2-8A-20$

(2) $(x+8)(x+7)(x-3)(x-4)$
$=\{(x+8)(x-4)\}\times\{(x+7)(x-3)\}$
$=\{(x^2+4x)-32\}\times\{(x^2+4x)-21\}$
$=(x^2+4x)^2-53(x^2+4x)+672$
$=x^4+8x^3+16x^2-53x^2-212x+672$
$=\boldsymbol{x^4+8x^3-37x^2-212x+672}$

←定数項に注目。
$8-4=4$, $7-3=4$
←$x^2+4x=A$ とおくと
$(A-32)(A-21)$
$=A^2-53A+672$

(3) $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$
$=\{x+(y+z)\}\{-x+(y+z)\}\times\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\}$
$=\{(y+z)^2-x^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$
$=\{-x^2+(y+z)^2\}\{x^2-(y-z)^2\}$
$=-x^4+\{(y+z)^2+(y-z)^2\}x^2-(y+z)^2(y-z)^2$
$=-x^4+2(y^2+z^2)x^2-(y^2-z^2)^2$
$=\boldsymbol{-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2}$

←平方の差の利用。
←$(-x^2+●)(x^2-■)$ の形。
←$(y+z)^2(y-z)^2$
$=\{(y+z)(y-z)\}^2$

(4) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$
$=\{x+(y+1)\}\{x^2-(y+1)x+(y^2-y+1)\}$
$=x^3+\{(y+1)-(y+1)\}x^2+\{(y^2-y+1)-(y+1)^2\}x$
$\quad+(y+1)(y^2-y+1)$
$=x^3+(-3y)x+y^3+1$
$=\boldsymbol{x^3+y^3-3xy+1}$

←x について整理し,
$(x+●)(x^2-▲x+■)$
とみて展開。

練習 ①10 次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)x-(a+b)y$　(2) $(a-b)x^2+(b-a)xy$
(3) $121-49x^2y^2$　(4) $8xyz^2-40xyz+50xy$
(5) $x^2-8x+12$　(6) $a^2+5ab-150b^2$　(7) $x^2-xy-12y^2$

(1) $(a+b)x-(a+b)y=\boldsymbol{(a+b)(x-y)}$

(2) $(a-b)x^2+(b-a)xy=(a-b)x^2-(a-b)xy$
$=\boldsymbol{x(a-b)(x-y)}$

←$b-a=-(a-b)$
←共通因数は $x(a-b)$

(3) $121-49x^2y^2=11^2-(7xy)^2$
$=(11+7xy)(11-7xy)$
$=\boldsymbol{-(7xy+11)(7xy-11)}$

←平方の差→和と差の積
←これでも正解。

(4) $8xyz^2-40xyz+50xy=2xy(4z^2-20z+25)$
$=2xy\{(2z)^2-2\cdot 2z\cdot 5+5^2\}$
$=\boldsymbol{2xy(2z-5)^2}$

←$a^2-2ab+b^2$
$=(a-b)^2$

(5) $x^2-8x+12=x^2+(-2-6)\cdot x+(-2)\cdot(-6)$
$=\boldsymbol{(x-2)(x-6)}$

←掛けて 12,
足して -8

(6) $a^2+5ab-150b^2=a^2+(15b-10b)\cdot a+15b\cdot(-10b)$
$=\boldsymbol{(a+15b)(a-10b)}$

←掛けて $-150b^2$,
足して $5b$

(7) $x^2-xy-12y^2=x^2+(3y-4y)\cdot x+3y\cdot(-4y)$
$=\boldsymbol{(x+3y)(x-4y)}$

←掛けて $-12y^2$,
足して $-y$

練習 ①11 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2+10x+3$　(2) $2x^2-9x+4$　(3) $6x^2+x-1$
(4) $8x^2-2xy-3y^2$　(5) $6a^2-ab-12b^2$　(6) $10p^2-19pq+6q^2$

(1) 右のたすき掛けから
$3x^2+10x+3=\boldsymbol{(x+3)(3x+1)}$

(1)
$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 \to & 9 \\ 3 & 1 \to & 1 \\ \hline 3 & 3 & 10 \end{array}$$

$=(x^2-z^2)(xy+1)$

$=(x+z)(x-z)(xy+1)$

(3) $6x^2-yz+2xz-3xy=(2x-y)z+6x^2-3xy$

$=(2x-y)z+3x(2x-y)$

$=(2x-y)(3x+z)$

←y, z のどちらについても1次であるが，y の係数が負であるから，z について整理。

(4) $3x^2-2z^2+4yz+2xy+5xz=(2x+4z)y+3x^2+5xz-2z^2$

$=2(x+2z)y+(x+2z)(3x-z)$

$=(x+2z)(2y+3x-z)$

$=(x+2z)(3x+2y-z)$

← $$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & \to 6 \\ 3 & -1 & \to -1 \\ \hline 3 & -2 & 5 \end{array}$$

練習 ②16

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2-2xy-3y^2+6x-10y+8$ (2) $2x^2-5xy-3y^2+7x+7y-4$

(3) $6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$

(1) $x^2-2xy-3y^2+6x-10y+8$

$=x^2-(2y-6)x-(3y^2+10y-8)$

$=x^2-(2y-6)x-(y+4)(3y-2)$

$=\{x+(y+4)\}\{x-(3y-2)\}$

$=(x+y+4)(x-3y+2)$

← $$\begin{array}{ccc} 1 & y+4 & \to y+4 \\ 1 & -(3y-2) & \to -3y+2 \\ \hline 1 & -(y+4)(3y-2) & -2y+6 \end{array}$$

(2) $2x^2-5xy-3y^2+7x+7y-4$

$=2x^2-(5y-7)x-(3y^2-7y+4)$

$=2x^2-(5y-7)x-(y-1)(3y-4)$

$=\{x-(3y-4)\}\{2x+(y-1)\}$

$=(x-3y+4)(2x+y-1)$

← $$\begin{array}{ccc} 1 & -(3y-4) & \to -6y+8 \\ 2 & y-1 & \to y-1 \\ \hline 2 & -(y-1)(3y-4) & -5y+7 \end{array}$$

(3) $6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$

$=6x^2+(5y+2)x+y^2-y-20$

$=6x^2+(5y+2)x+(y+4)(y-5)$

$=\{2x+(y+4)\}\{3x+(y-5)\}$

$=(2x+y+4)(3x+y-5)$

← $$\begin{array}{ccc} 2 & y+4 & \to 3y+12 \\ 3 & y-5 & \to 2y-10 \\ \hline 6 & (y+4)(y-5) & 5y+2 \end{array}$$

別解 y について整理すると

$6x^2+5xy+y^2+2x-y-20$

$=y^2+(5x-1)y+2(3x^2+x-10)$

$=y^2+(5x-1)y+2(x+2)(3x-5)$

$=\{y+2(x+2)\}\{y+(3x-5)\}$

$=(2x+y+4)(3x+y-5)$

← $$\begin{array}{ccc} 1 & 2(x+2) & \to 2x+4 \\ 1 & 3x-5 & \to 3x-5 \\ \hline 1 & 2(x+2)(3x-5) & 5x-1 \end{array}$$

練習 ②17

次の式を因数分解せよ。

(1) $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$ (2) $a^2b+ab^2+a+b-ab-1$

(1) $abc+ab+bc+ca+a+b+c+1$

$=(bc+b+c+1)a+bc+b+c+1$

$=(a+1)(bc+b+c+1)$

$=(a+1)\{(c+1)b+c+1\}$

$=(a+1)(b+1)(c+1)$

←a について整理。

←$bc+b+c+1$ を b について整理。

(2) $a^2b+ab^2+a+b-ab-1$

$=ba^2+(b^2-b+1)a+b-1$

$=(a+b-1)(ba+1)$

$=(a+b-1)(ab+1)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & b-1 & \to b^2-b \\ b & 1 & \to 1 \\ \hline b & b-1 & b^2-b+1 \end{array}$$

←a について整理。

別解 $a^2b+ab^2+a+b-ab-1=ab(\underline{a+b})+\underline{a+b}-ab-1$

$=(a+b)(ab+1)-(ab+1)$

$=(a+b-1)(ab+1)$

←項を組み合わせて，共通な式が現れたら，くくり出していく方法。

練習 ③18

次の式を因数分解せよ。

(1) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc$ (2) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

(1) (与式)$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

←a について整理。

$$\begin{array}{ccc} 1 & b+c & \to b^2+2bc+c^2 \\ b+c & bc & \to bc \\ \hline b+c & bc(b+c) & b^2+3bc+c^2 \end{array}$$

別解 (与式)$=ab(a+b+c)-abc+bc(a+b+c)-abc$

$+ca(a+b+c)-abc+3abc$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

←式の形の特徴をにらんで，各項にない文字を加えて引くと，$3abc$ が消える。

(2) (与式)$=(b-c)^3a+b(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)$

$+c(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=-(b-c)a^3+\{(b-c)^3+3bc(b-c)\}a-bc(b^2-c^2)$

$=-(b-c)a^3+(b-c)\{(b-c)^2+3bc\}a-bc(b+c)(b-c)$

$=-(b-c)a^3+(b-c)(b^2+bc+c^2)a-bc(b+c)(b-c)$

$=-(b-c)\{a^3-(b^2+bc+c^2)a+bc(b+c)\}$

$=-(b-c)\{(c-a)b^2+(c^2-ca)b+a(a^2-c^2)\}$

$=-(b-c)\{(c-a)b^2+c(c-a)b-a(c+a)(c-a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{b^2+cb-a(c+a)\}$

$=-(b-c)(c-a)\{(b-a)c+b^2-a^2\}$

$=-(b-c)(c-a)(b-a)\{c+(b+a)\}$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

←a について整理。

←$b-c$ が共通因数。

←{ }内は b について整理。$c-a$ が共通因数。

←{ }内は c について整理。$b-a$ が共通因数。

練習 ③19

次の式を因数分解せよ。

(1) x^4+3x^2+4 (2) $x^4-11x^2y^2+y^4$ (3) $x^4-9x^2y^2+16y^4$ (4) $4x^4+11x^2y^2+9y^4$

(1) $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2=(x^2+2)^2-x^2$

$=\{(x^2+2)+x\}\{(x^2+2)-x\}$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

←x^2 を加えて引く。

(2) $x^4-11x^2y^2+y^4=(x^4-2x^2y^2+y^4)-9x^2y^2=(x^2-y^2)^2-(3xy)^2$

$=\{(x^2-y^2)+3xy\}\{(x^2-y^2)-3xy\}$

$=(x^2+3xy-y^2)(x^2-3xy-y^2)$

←$(\ )^2-(\ )^2$ となるように，x^2y^2 の係数を $-11=-2-9$ と考える。

(3) $x^4-9x^2y^2+16y^4=\{x^4-8x^2y^2+(4y^2)^2\}-x^2y^2$

$=(x^2-4y^2)^2-(xy)^2$

←$-9=-8-1$

$=\{(x^2-4y^2)+xy\}\{(x^2-4y^2)-xy\}$

$=\boldsymbol{(x^2+xy-4y^2)(x^2-xy-4y^2)}$

(4) $4x^4+11x^2y^2+9y^4=\{(2x^2)^2+12x^2y^2+(3y^2)^2\}-x^2y^2$　←x^2y^2 を加えて引く。

$=(2x^2+3y^2)^2-(xy)^2$

$=\{(2x^2+3y^2)+xy\}\{(2x^2+3y^2)-xy\}$

$=\boldsymbol{(2x^2+xy+3y^2)(2x^2-xy+3y^2)}$

練習 ④20 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$　　(2) $a^3+6ab-8b^3+1$

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$

$=a^3+(-b)^3+(-c)^3-3a(-b)(-c)$

$=\{a+(-b)+(-c)\}$

$\times\{a^2+(-b)^2+(-c)^2-a(-b)-(-b)(-c)-(-c)a\}$

$=\boldsymbol{(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)}$

HINT
例題 20 (1) の結果
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
を公式として用いる。

(2) $a^3+6ab-8b^3+1=a^3-8b^3+1+6ab$　←項の順序を入れ替える。

$=a^3+(-2b)^3+1^3-3a\cdot(-2b)\cdot1$　←HINT の公式で，b に $-2b$，c に 1 を代入する。

$=\{a+(-2b)+1\}\{a^2+(-2b)^2+1^2-a\cdot(-2b)-(-2b)\cdot1-1\cdot a\}$

$=(a-2b+1)(a^2+4b^2+1+2ab+2b-a)$

$=\boldsymbol{(a-2b+1)(a^2+2ab+4b^2-a+2b+1)}$　←降べきの順に整理。

練習 ①21 (1) 次の分数を小数に直し，循環小数の表し方で書け。

(ア) $\dfrac{22}{9}$　　(イ) $\dfrac{1}{12}$　　(ウ) $\dfrac{8}{7}$

(2) 次の循環小数を分数で表せ。

(ア) $0.\dot{7}$　　(イ) $0.\dot{2}4\dot{6}$　　(ウ) $0.0\dot{7}2\dot{9}$

(1) (ア) $\dfrac{22}{9}=2.444\cdots\cdots=\boldsymbol{2.\dot{4}}$

(イ) $\dfrac{1}{12}=0.08333\cdots\cdots=\boldsymbol{0.08\dot{3}}$

(ウ) $\dfrac{8}{7}=1.142857142857\cdots\cdots=\boldsymbol{1.\dot{1}4285\dot{7}}$　←小数第 1 位以降 142857 が繰り返される。

(2) (ア) $x=0.\dot{7}$ とおくと　$10x=7.777\cdots\cdots$

よって　$10x-x=7$　すなわち　$9x=7$

したがって　$x=\boldsymbol{\dfrac{7}{9}}$

$$\begin{array}{rr} & 10x=7.777\cdots \\ -) & x=0.777\cdots \\ \hline & 9x=7 \end{array}$$

(イ) $x=0.\dot{2}4\dot{6}$ とおくと　$1000x=246.246246\cdots\cdots$

よって　$1000x-x=246$　すなわち　$999x=246$

したがって　$x=\dfrac{246}{999}=\boldsymbol{\dfrac{82}{333}}$

$$\begin{array}{rr} & 1000x=246.246\cdots \\ -) & x=0.246\cdots \\ \hline & 999x=246 \end{array}$$

(ウ) $x=0.0\dot{7}2\dot{9}$ とおくと　$10x=0.729729\cdots\cdots$　←循環部分の最初が小数第 1 位になるようにする。

よって　$1000\times10x=729.729729\cdots\cdots$

ゆえに　$10000x-10x=729$

すなわち　$9990x=729$　よって　$x=\dfrac{729}{9990}=\boldsymbol{\dfrac{27}{370}}$

$$\begin{array}{rr} & 10000x=729.729\cdots \\ -) & 10x=0.729\cdots \\ \hline & 9990x=729 \end{array}$$

練習 ①22 (1) 次の値を求めよ。

(ア) $|-6|$　　(イ) $|\sqrt{2}-1|$　　(ウ) $|2\sqrt{3}-4|$

(2) 数直線上において，次の 2 点間の距離を求めよ。

(ア) P(-2)，Q(5)　　(イ) A(8)，B(3)　　(ウ) C(-4)，D(-1)

(3) $x=2$，3 のとき，$P=|x-1|-2|3-x|$ の値をそれぞれ求めよ。

(1) (ア) $-6<0$ であるから　$|-6|=-(-6)=\boldsymbol{6}$　←$-$ をつけてはずす。

(イ) $\sqrt{2}>1$ から　$\sqrt{2}-1>0$　よって　$|\sqrt{2}-1|=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$　←$\sqrt{2}>\sqrt{1}$

(ウ) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}<4$ から　$2\sqrt{3}-4<0$　←$\sqrt{12}<\sqrt{16}$

よって　$|2\sqrt{3}-4|=-(2\sqrt{3}-4)=\boldsymbol{4-2\sqrt{3}}$

(2) (ア) P，Q 間の距離は　$|5-(-2)|=|7|=\boldsymbol{7}$

(イ) A，B 間の距離は　$|3-8|=|-5|=\boldsymbol{5}$　←$|-5|=-(-5)=5$

(ウ) C，D 間の距離は　$|-1-(-4)|=|3|=\boldsymbol{3}$

(3) $\boldsymbol{x=2}$ のとき　$P=|2-1|-2|3-2|=|1|-2|1|=1-2\cdot1=\boldsymbol{-1}$　←$|1|=1$

$\boldsymbol{x=3}$ のとき　$P=|3-1|-2|3-3|=|2|-2|0|=2-2\cdot0=\boldsymbol{2}$　←$|0|=0$

練習 ①23 (1) 次の値を求めよ。

(ア) $\sqrt{(-3)^2}$　　(イ) $\sqrt{(-15)(-45)}$　　(ウ) $\sqrt{15}\sqrt{35}\sqrt{42}$

(2) 次の式を計算せよ。

(ア) $\sqrt{18}-2\sqrt{50}-\sqrt{8}+\sqrt{32}$　　(イ) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$

(ウ) $(2\sqrt{5}-3\sqrt{3})(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})$　　(エ) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})$

(1) (ア) $\sqrt{(-3)^2}=|-3|=\boldsymbol{3}$　←$\sqrt{(-3)^2}=-3$ は誤り！

(イ) $\sqrt{(-15)(-45)}=\sqrt{15\times45}=\sqrt{3\cdot5\times3^2\cdot5}=\sqrt{3^3\cdot5^2}$

$=3\cdot5\sqrt{3}=\boldsymbol{15\sqrt{3}}$　←$\sqrt{15^2\cdot3}$ としてもよい。

(ウ) $\sqrt{15}\sqrt{35}\sqrt{42}=\sqrt{15\times35\times42}=\sqrt{3\cdot5\times5\cdot7\times2\cdot3\cdot7}$　←根号内を素因数分解する。

$=\sqrt{2\cdot3^2\cdot5^2\cdot7^2}=3\cdot5\cdot7\sqrt{2}=\boldsymbol{105\sqrt{2}}$

(2) (ア) (与式)$=\sqrt{3^2\cdot2}-2\sqrt{5^2\cdot2}-\sqrt{2^2\cdot2}+\sqrt{4^2\cdot2}$

$=3\sqrt{2}-2\cdot5\sqrt{2}-2\sqrt{2}+4\sqrt{2}$　←$a>0$，$k>0$ のとき $\sqrt{k^2a}=k\sqrt{a}$

$=(3-10-2+4)\sqrt{2}=\boldsymbol{-5\sqrt{2}}$

(イ) (与式)$=(2\sqrt{3})^2-2\cdot2\sqrt{3}\cdot3\sqrt{2}+(3\sqrt{2})^2$　←$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=4\cdot3-12\sqrt{6}+9\cdot2=\boldsymbol{30-12\sqrt{6}}$

(ウ) (与式)$=2\cdot3(\sqrt{5})^2+(2\cdot2-3\cdot3)\sqrt{5}\sqrt{3}+(-3)\cdot2(\sqrt{3})^2$　←$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

$=6\cdot5+(4-9)\sqrt{15}-6\cdot3$

$=\boldsymbol{12-5\sqrt{15}}$

(エ) (与式)$=\{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}$　←$\sqrt{5}=a$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}=b$ とおくと $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-(3-2\sqrt{6}+2)$

$=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$

練習 ②24 次の式を，分母を有理化して簡単にせよ。

(1) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}$　　(2) $\dfrac{6}{3-\sqrt{7}}$　　(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(4) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$　　(5) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

HINT (5) $(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=(\sqrt{5})^2$ に着目する。

(1) $(与式)=\dfrac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{2(\sqrt{3})^2}-\dfrac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{3(\sqrt{2})^2}=\dfrac{3\sqrt{6}}{6}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{6}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

←分母が $\sqrt{a}$ なら，分母・分子に $\sqrt{a}$ を掛ける。

(2) $(与式)=\dfrac{6(3+\sqrt{7})}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}=\dfrac{6(3+\sqrt{7})}{9-7}$

$=3(3+\sqrt{7})=\mathbf{9+3\sqrt{7}}$

←分母が $a-\sqrt{b}$ なら，分母・分子に $a+\sqrt{b}$ を掛ける。

(3) $(与式)=\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}-\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$

$=\dfrac{5-2\sqrt{6}}{3-2}-\dfrac{8+2\sqrt{15}}{5-3}=5-2\sqrt{6}-(4+\sqrt{15})$

$=\mathbf{1-2\sqrt{6}-\sqrt{15}}$

←分母が $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ なら，分母・分子に $\sqrt{a}-\sqrt{b}$；分母が $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ なら，分母・分子に $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ を掛ける。

(4) $(与式)=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\{(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}\}\{(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}\}}$

$+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})}$

$=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{7})^2}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{25-24}=\dfrac{1+\sqrt{6}-\sqrt{7}}{2\sqrt{6}}+5-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{6}-\sqrt{7})\sqrt{6}}{2(\sqrt{6})^2}+5-2\sqrt{6}$

$=\dfrac{\sqrt{6}+6-\sqrt{42}}{12}+\dfrac{12(5-2\sqrt{6})}{12}=\mathbf{\dfrac{66-23\sqrt{6}-\sqrt{42}}{12}}$

←$\dfrac{1}{1+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ は，分母を $(1+\sqrt{6})+\sqrt{7}$ と考えて分母・分子に $(1+\sqrt{6})-\sqrt{7}$ を掛ける。

←更に分母を有理化。

←通分する。

(5) $(与式)=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}}$

$=\dfrac{\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{3}\}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$

$=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2+\sqrt{10}}{\sqrt{6}}$

$=\dfrac{(2+\sqrt{10})\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2}=\dfrac{2\sqrt{6}+2\sqrt{15}}{6}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{15}}{3}}$

←例えば，分母・分子に $\sqrt{2}-(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ を掛けると，分母は $2(\sqrt{15}-3)$ となり，更に分母・分子に $\sqrt{15}+3$ を掛けることになる。これは，左の解答より計算が複雑。

練習 ②25

(1) 次の(ア)～(ウ)の場合について，$\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{a^2}$ の根号をはずし簡単にせよ。

(ア) $a\geqq 0$　(イ) $-2\leqq a<0$　(ウ) $a<-2$

(2) 次の式の根号をはずし簡単にせよ。

$\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{16x^2-24x+9}$ $\left(ただし\ -2<x<\dfrac{3}{4}\right)$　[(2) 類 東北工大]

(1) $P=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{a^2}$ とおくと　$P=|a+2|+|a|$

(ア) $a\geqq 0$ のとき　$a+2>0$，$a\geqq 0$

よって　$P=(a+2)+a=\mathbf{2a+2}$

(イ) $-2\leqq a<0$ のとき　$a+2\geqq 0$，$a<0$

よって　$P=(a+2)-a=a+2-a=\mathbf{2}$

(ウ) $a<-2$ のとき　$a+2<0$，$a<0$

よって　$P=-(a+2)-a=-a-2-a=\mathbf{-2a-2}$

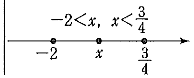
HINT $\sqrt{A^2}=|A|$ である（$\sqrt{A^2}=A$ とは限らないことに注意）。与式をまず｜ ｜の式に直す。

(2) $(与式)=\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(4x-3)^2}=|x+2|-|4x-3|$

$-2<x<\dfrac{3}{4}$ のとき　$x+2>0$，$4x-3<0$

よって　$(与式)=(x+2)-\{-(4x-3)\}$

$=x+2+4x-3=\mathbf{5x-1}$



練習 ②26

次の式の2重根号をはずして簡単にせよ。

(1) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$　(2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}$　(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$　(4) $\sqrt{9-3\sqrt{5}}$

(1) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}=\sqrt{6+2\sqrt{2^2\cdot 2}}=\sqrt{(4+2)+2\sqrt{4\cdot 2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{4}+\sqrt{2}=\mathbf{2+\sqrt{2}}$

(2) $\sqrt{8-\sqrt{48}}=\sqrt{8-\sqrt{2^2\cdot 12}}=\sqrt{(6+2)-2\sqrt{6\cdot 2}}$

$=\sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}=\mathbf{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

(3) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}}$

(4) $\sqrt{9-3\sqrt{5}}=\sqrt{\dfrac{18-6\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{18-2\sqrt{3^2\cdot 5}}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{(15+3)-2\sqrt{15\cdot 3}}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{15}-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{6}}{2}}$

←$a>0$，$b>0$ のとき
$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$
$=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$
$=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

←$a>b>0$ のとき
$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}$
$=\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$
$=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

←分母を有理化。

←分母を有理化。

練習 ③27

$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。

(1) a，b の値を求めよ。　(2) $\dfrac{a+b^2}{3b}$，$a^2-b^2-2a-2b$ の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=2+\sqrt{3}$

$1<\sqrt{3}<2$ であるから，$\sqrt{3}$ の整数部分は　1

よって，$2+\sqrt{3}$ の整数部分は　$2+1=3$

したがって　$\mathbf{a=3}$，$b=(2+\sqrt{3})-3=\mathbf{\sqrt{3}-1}$

←分母を有理化。

←$\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}$ から。

←(小数部分)
=(数)−(整数部分)

(2) (1)から　$\dfrac{a+b^2}{3b}=\dfrac{3+(\sqrt{3}-1)^2}{3(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{7-2\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{(7-2\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{3(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{7\sqrt{3}+7-2(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}}{3(3-1)}=\mathbf{\dfrac{5\sqrt{3}+1}{6}}$

$a^2-b^2-2a-2b=(a+b)(a-b)-2(a+b)$

$=(a+b)(a-b-2)$

$=(2+\sqrt{3})\{3-(\sqrt{3}-1)-2\}$

$=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-3=\mathbf{1}$

←分母を有理化。

←(数)=(整数部分)+(小数部分)であるから
$a+b=2+\sqrt{3}$

練習 ②28 $x=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ のとき，$x+y$，xy，x^2+y^2，x^3+y^3，x^3-y^3 の値を求めよ。

〔類 順天堂大〕

HINT x^3-y^3 は $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ を利用して求めるとよい。

$$\boldsymbol{x+y}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

←通分と同時に分母が有理化される。

$$=\frac{(5+2\sqrt{15}+3)+(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}=\boldsymbol{8}$$

$$\boldsymbol{xy}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\boldsymbol{1}$$

←x と y は互いに他の逆数となっているから $xy=1$

$$\boldsymbol{x^2+y^2}=(x+y)^2-2xy=8^2-2\cdot1=\boldsymbol{62}$$

$$\boldsymbol{x^3+y^3}=(x+y)^3-3xy(x+y)=8^3-3\cdot1\cdot8=\boldsymbol{488}$$

また $\quad x-y=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

←x^3-y^3 の値を求めるため，まず $x-y$ の値を求める。

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{15}+3)-(5-2\sqrt{15}+3)}{5-3}$$

$$=2\sqrt{15}$$

よって $\quad \boldsymbol{x^3-y^3}=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$$=2\sqrt{15}(62+1)=\boldsymbol{126\sqrt{15}}$$

←既に求めた x^2+y^2，xy の値を利用。

別解 $\boldsymbol{x^3-y^3}=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$$=(2\sqrt{15})^3+3\cdot1\cdot2\sqrt{15}$$

$$=120\sqrt{15}+6\sqrt{15}=\boldsymbol{126\sqrt{15}}$$

←$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ で y を $-y$ におき換える。

練習 ③29 $2x+\dfrac{1}{2x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $4x^2+\dfrac{1}{4x^2}$　　(2) $8x^3+\dfrac{1}{8x^3}$　　(3) $64x^6+\dfrac{1}{64x^6}$

(1) $4x^2+\dfrac{1}{4x^2}=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^2-2\cdot2x\cdot\dfrac{1}{2x}=(\sqrt{7})^2-2\cdot1=\boldsymbol{5}$

←$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

(2) $8x^3+\dfrac{1}{8x^3}=\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)^3-3\cdot2x\cdot\dfrac{1}{2x}\left(2x+\dfrac{1}{2x}\right)$

$$=(\sqrt{7})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{7}=7\sqrt{7}-3\sqrt{7}=\boldsymbol{4\sqrt{7}}$$

←$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

(3) $64x^6+\dfrac{1}{64x^6}=(8x^3)^2+\dfrac{1}{(8x^3)^2}=\left(8x^3+\dfrac{1}{8x^3}\right)^2-2\cdot8x^3\cdot\dfrac{1}{8x^3}$

$$=(4\sqrt{7})^2-2\cdot1=112-2=\boldsymbol{110}$$

←(2)の結果を利用。

別解 $64x^6+\dfrac{1}{64x^6}=(4x^2)^3+\dfrac{1}{(4x^2)^3}$

$$=\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^3-3\cdot4x^2\cdot\frac{1}{4x^2}\left(4x^2+\frac{1}{4x^2}\right)$$

$$=5^3-3\cdot1\cdot5=\boldsymbol{110}$$

←$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

←(1)の結果を利用。

練習 ④30 $x+y+z=2\sqrt{3}+1$，$xy+yz+zx=2\sqrt{3}-1$，$xyz=-1$ を満たす実数 x，y，z に対して，次の式の値を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$　　(2) $x^2+y^2+z^2$　　(3) $x^3+y^3+z^3$

(1) $\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}=\dfrac{z}{xy\cdot z}+\dfrac{x}{yz\cdot x}+\dfrac{y}{zx\cdot y}=\dfrac{z+x+y}{xyz}$

←まず分母を xyz にそろえる（通分する）。

$$=\frac{2\sqrt{3}+1}{-1}=\boldsymbol{-2\sqrt{3}-1}$$

(2) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$$=(2\sqrt{3}+1)^2-2(2\sqrt{3}-1)$$

$$=13+4\sqrt{3}-4\sqrt{3}+2=\boldsymbol{15}$$

(3) (2)から

$$x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$$

$$=(2\sqrt{3}+1)\{15-(2\sqrt{3}-1)\}+3\cdot(-1)$$

$$=2(2\sqrt{3}+1)(8-\sqrt{3})-3$$

$$=4+30\sqrt{3}-3=\boldsymbol{30\sqrt{3}+1}$$

別解 $x^3+y^3+z^3$

$$=(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+3xyz$$

←対称式は基本対称式で表すことができる。

$$=(2\sqrt{3}+1)^3-3(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)-3$$

$$=24\sqrt{3}+36+6\sqrt{3}+1-33-3=\boldsymbol{30\sqrt{3}+1}$$

練習 ④31 $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $2a^2-2a-1$　　(2) a^8

(1) $a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ から $\quad 2a-1=-\sqrt{3}$

両辺を2乗して $\quad (2a-1)^2=3 \quad$ ゆえに $\quad 4a^2-4a-2=0$

したがって $\quad 2a^2-2a-1=\boldsymbol{0}$

←根号をなくすために，両辺を2乗する。

(2) (1)から $\quad a^2=a+\dfrac{1}{2}$

←この式を利用して a^8 の次数を下げる。

$a^8=(a^4)^2$ であるから，a^4 について

$$a^4=(a^2)^2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a^2+a+\frac{1}{4}$$

$$=\left(a+\frac{1}{2}\right)+a+\frac{1}{4}=2a+\frac{3}{4}$$

←a^2 を $a+\dfrac{1}{2}$ におき換える。この操作を a^2 が現れるたびに繰り返す。

よって $\quad a^8=(a^4)^2=\left(2a+\dfrac{3}{4}\right)^2=4a^2+3a+\dfrac{9}{16}$

$$=4\left(a+\frac{1}{2}\right)+3a+\frac{9}{16}=7a+\frac{41}{16}$$

$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ を代入して

←最後に代入する。

$$a^8=7\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{41}{16}=\frac{56(1-\sqrt{3})+41}{16}=\boldsymbol{\frac{97-56\sqrt{3}}{16}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ $a^4=2a+\dfrac{3}{4}$ を求めるところまでは同じ。

$$a^4=2a+\frac{3}{4}=2\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$$

←a^4 の段階で，$a=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ を代入。

よって $a^8=(a^4)^2=\left(\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4}\right)^2=\dfrac{(7-4\sqrt{3})^2}{4^2}$

$$=\mathbf{\frac{97-56\sqrt{3}}{16}}$$

$\boxed{\text{別解}}$ (1) から $a^2=a+\dfrac{1}{2}$

これを利用して

$$a^3=a^2+\frac{1}{2}a=\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}$$

←$a^3=a^2\cdot a$

$$a^4=\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}a=2a+\frac{3}{4}$$

←$a^4=a^3\cdot a$

$$a^5=2a^2+\frac{3}{4}a=2\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}a=\frac{11}{4}a+1$$

$$a^6=\frac{11}{4}a^2+a=\frac{11}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)+a=\frac{15}{4}a+\frac{11}{8}$$

$$a^7=\frac{15}{4}a^2+\frac{11}{8}a=\frac{15}{4}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{8}a=\frac{41}{8}a+\frac{15}{8}$$

$$a^8=\frac{41}{8}a^2+\frac{15}{8}a=\frac{41}{8}\left(a+\frac{1}{2}\right)+\frac{15}{8}a=7a+\frac{41}{16}$$

参考
左の $\boxed{\text{別解}}$ のようにして，a^n（n は自然数）は a の 1 次式で表すことができる。

よって $a^8=7\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{41}{16}=\mathbf{\dfrac{97-56\sqrt{3}}{16}}$

練習 ①32

$-1<x<2$，$1<y<3$ であるとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $x+3$　(2) $-2y$　(3) $-\dfrac{x}{5}$　(4) $5x-3y$

(1) $-1<x<2$ の各辺に 3 を加えて　$-1+3<x+3<2+3$

すなわち　$\mathbf{2<x+3<5}$

(2) $1<y<3$ の各辺に -2 を掛けて　$1\cdot(-2)>-2y>3\cdot(-2)$　←不等号の向きが変わる。

すなわち　$\mathbf{-6<-2y<-2}$　←$-2>-2y>-6$ でもよい。

(3) $-1<x<2$ の各辺に $-\dfrac{1}{5}$ を掛けて

$$-1\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)>-\frac{1}{5}x>2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$$

←不等号の向きが変わる。

すなわち　$\mathbf{-\dfrac{2}{5}<-\dfrac{x}{5}<\dfrac{1}{5}}$

(4) $-1<x<2$ の各辺に 5 を掛けて　$-5<5x<10$ …… ①

$1<y<3$ の各辺に -3 を掛けて　$-3>-3y>-9$　←不等号の向きが変わる。

すなわち　$-9<-3y<-3$ …… ②　←不等号の向きを ① とそろえる。

①，② の各辺を加えて　$\mathbf{-14<5x-3y<7}$

練習 ③33

x，y を正の数とする。x，$5x-3y$ を小数第 1 位で四捨五入すると，それぞれ 7，13 になるという。

(1) x の値の範囲を求めよ。　(2) y の値の範囲を求めよ。

1章 練習［数と式］

(1) x は小数第 1 位を四捨五入すると 7 になる数であるから

$\mathbf{6.5\leqq x<7.5}$ …… ①

(2) $5x-3y$ は小数第 1 位を四捨五入すると 13 になる数であるから　$12.5\leqq 5x-3y<13.5$ …… ②

① の各辺に -5 を掛けて

$-32.5\geqq -5x>-37.5$　←不等号の向きが変わる。

すなわち　$-37.5<-5x\leqq -32.5$ …… ③

②，③ の各辺を加えて

$12.5-37.5<5x-3y-5x<13.5-32.5$　←不等号が $\leqq$ ではなく，$<$ となることに注意。

したがって　$-25<-3y<-19$

各辺を -3 で割って　$\dfrac{25}{3}>y>\dfrac{19}{3}$

すなわち　$\mathbf{\dfrac{19}{3}<y<\dfrac{25}{3}}$

練習 ②34

次の 1 次不等式を解け。

(1) $5x-7>3(x+1)$　(2) $4(3-2x)\leqq 5(x+2)$　(3) $\dfrac{3x+2}{5}<\dfrac{2x-1}{3}$

(4) $0.2x+1\leqq -0.3x-2.5$　(5) $x+\dfrac{1}{3}\left\{x-\dfrac{1}{4}(x+1)\right\}>2x-\dfrac{1}{2}$

(1) 不等式から　$5x-7>3x+3$

整理して　$2x>10$

両辺を 2 で割って　$\mathbf{x>5}$

(2) 不等式から　$12-8x\leqq 5x+10$

整理して　$-13x\leqq -2$

両辺を -13 で割って　$\mathbf{x\geqq \dfrac{2}{13}}$　←不等号の向きが変わる。

(3) 両辺に 15 を掛けて　$3(3x+2)<5(2x-1)$　←分母の最小公倍数は 15

よって　$9x+6<10x-5$

整理して　$-x<-11$

両辺を -1 で割って　$\mathbf{x>11}$　←不等号の向きが変わる。

(4) 両辺に 10 を掛けて　$2x+10\leqq -3x-25$　←係数が小数では計算しにくいから，係数を整数に直す。

整理して　$5x\leqq -35$

両辺を 5 で割って　$\mathbf{x\leqq -7}$

(5) 不等式から　$x+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{4}\right)>2x-\dfrac{1}{2}$　←内側の括弧からはずし，{ } を ( ) に変える。

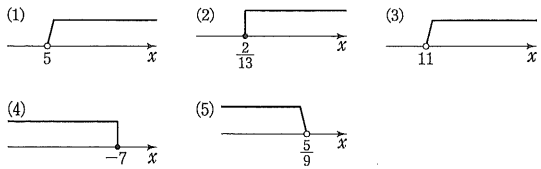
よって　$\dfrac{5}{4}x-\dfrac{1}{12}>2x-\dfrac{1}{2}$

両辺に 12 を掛けて　$15x-1>24x-6$　←分母の最小公倍数は 12。

整理して　$-9x>-5$

両辺を -9 で割って　$\mathbf{x<\dfrac{5}{9}}$　←不等号の向きが変わる。

検討 (1)～(5) の解を数直線を用いて表すと次のようになる。



←本冊 p.63 解説参照。

練習 ②35 連立不等式 (1) $\begin{cases} 2(1-x)>-6-x \\ 2x-3>-9 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3(x-4)\leqq x-3 \\ 6x-2(x+1)<10 \end{cases}$ を解け。

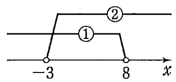
(3) 不等式 $x+9\leqq 3-5x\leqq 2(x-2)$ を解け。

(1) $2(1-x)>-6-x$ から　$2-2x>-6-x$

よって　$-x>-8$　したがって　$x<8$ …… ①

$2x-3>-9$ から　$2x>-6$　よって　$x>-3$ …… ②

①, ② の共通範囲を求めて　$-3<x<8$



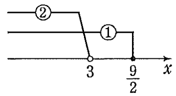
(2) $3(x-4)\leqq x-3$ から　$3x-12\leqq x-3$

よって　$2x\leqq 9$　したがって　$x\leqq\frac{9}{2}$ …… ①

$6x-2(x+1)<10$ から　$6x-2x-2<10$

よって　$4x<12$　したがって　$x<3$ …… ②

①, ② の共通範囲を求めて　$x<3$



(3) $\begin{cases} x+9\leqq 3-5x \\ 3-5x\leqq 2(x-2) \end{cases}$

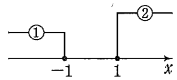
←不等式 $A\leqq B\leqq C$ は, 連立不等式 $A\leqq B$, $B\leqq C$ と同じ意味。

$x+9\leqq 3-5x$ から　$6x\leqq -6$　よって　$x\leqq -1$ …… ①

$3-5x\leqq 2(x-2)$ から　$3-5x\leqq 2x-4$

よって　$-7x\leqq -7$　したがって　$x\geqq 1$ …… ②

①, ② の共通範囲はないから, 不等式の **解はない**。



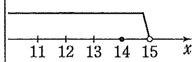
練習 ②36 (1) 不等式 $4(x-2)+5(6-x)>7$ を成り立たせる x の値のうち, 最も大きい整数を求めよ。

(2) 不等式 $3x+1>2a$ を満たす x の最小の整数値が 4 であるとき, 整数 a の値をすべて求めよ。

(1) 不等式から　$4x-8+30-5x>7$

ゆえに　$-x>-15$　よって　$x<15$

したがって, 求める最も大きい整数は　**14**



(2) $3x+1>2a$ を x について解くと　$x>\frac{2a-1}{3}$

この不等式を満たす x の最小の整数値が 4 であるから

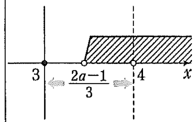
$$3\leqq\frac{2a-1}{3}<4$$

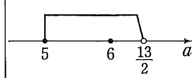
各辺に 3 を掛けて　$9\leqq 2a-1<12$

各辺に 1 を加えて　$10\leqq 2a<13$

よって　$5\leqq a<\frac{13}{2}$

これを満たす整数 a の値は　$a=5, 6$





練習 ③37 x に関する連立不等式 $\begin{cases} 6x-4>3x+5 \\ 2x-1\leqq x+a \end{cases}$ を満たす整数がちょうど 5 個あるとする。

このとき, 定数 a のとりうる値の範囲は ア$\boxed{}\leqq a<$イ$\boxed{}$ である。　〔類 摂南大〕

$6x-4>3x+5$ から　$3x>9$

よって　$x>3$ …… ①

$2x-1\leqq x+a$ から　$x\leqq a+1$ …… ②

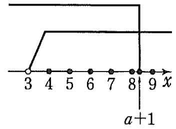
与えられた連立不等式を満たす整数が存在するから, ① と ② に共通範囲があって

$3<x\leqq a+1$

これを満たす整数 x がちょうど 5 個存在するとき, その整数 x は　$x=4, 5, 6, 7, 8$

よって　$8\leqq a+1<9$

ゆえに　ア$7\leqq a<$イ8



練習 ④38 (1) 不等式 $ax>x+a^2+a-2$ を解け。ただし, a は定数とする。

(2) 不等式 $2ax\leqq 4x+1\leqq 5$ の解が $-5\leqq x\leqq 1$ であるとき, 定数 a の値を求めよ。

(1) 与式から　$(a-1)x>(a-1)(a+2)$ …… ①

[1] $a-1>0$ すなわち $a>1$ のとき　$x>a+2$

←$a-1$ が正, 0, 負のときで場合分け。

[2] $a-1=0$ すなわち $a=1$ のとき　① は　$0\cdot x>0$

これを満たす x の値はない。

[3] $a-1<0$ すなわち $a<1$ のとき　$x<a+2$

←負の数で割ると, 不等号の向きが変わる。

よって $\begin{cases} a>1 \text{ のとき } x>a+2 \\ a=1 \text{ のとき 解はない} \\ a<1 \text{ のとき } x<a+2 \end{cases}$

(2) $4x+1\leqq 5$ から　$4x\leqq 4$　よって　$x\leqq 1$

ゆえに, 解が $-5\leqq x\leqq 1$ となるための条件は,

$2ax\leqq 4x+1$ …… ① の解が $x\geqq -5$ となることである。

① から　$2(a-2)x\leqq 1$ …… ②

[1] $a-2>0$ すなわち $a>2$ のとき, ② から

←$a-2$ が正, 0, 負のときで場合分け。

$$x\leqq\frac{1}{2(a-2)}$$

このとき条件は満たされない。

←$x\geqq -5$ と不等号の向きが違う。

[2] $a-2=0$ すなわち $a=2$ のとき, ② は　$0\cdot x\leqq 1$

よって, 解はすべての実数であるから, 条件は満たされない。

←$0\leqq 1$ は常に成り立つ。

[3] $a-2<0$ すなわち $a<2$ のとき, ② から

$$x\geqq\frac{1}{2(a-2)}$$

←負の数で割ると, 不等号の向きが変わる。

ゆえに　$\frac{1}{2(a-2)}=-5$　よって　$1=-10(a-2)$

ゆえに　$a=\frac{19}{10}$　これは $a<2$ を満たす。

[1]～[3] から　$a=\frac{19}{10}$

練習 ②39 兄弟合わせて 52 本の鉛筆を持っている。いま，兄が弟に自分が持っている鉛筆のちょうど $\frac{1}{3}$ をあげてもまだ兄の方が多く，更に 3 本あげると弟の方が多くなる。兄が初めに持っていた鉛筆の本数を求めよ。

兄が初めに x 本持っていたとすると，条件から

$$\begin{cases} x-\frac{1}{3}x>52-x+\frac{1}{3}x & \cdots\cdots ① \\ x-\frac{1}{3}x-3<52-x+\frac{1}{3}x+3 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① の両辺に 3 を掛けて　$3x-x>156-3x+x$

よって　$4x>156$　ゆえに　$x>39$ …… ③

② の両辺に 3 を掛けて　$3x-x-9<156-3x+x+9$

よって　$4x<174$　ゆえに　$x<\frac{87}{2}$ …… ④

③，④ の共通範囲を求めて　$39<x<\frac{87}{2}$

条件より，x は 3 の倍数であるから　$x=42$

よって，求める鉛筆の本数は　**42 本**

←不等式の左辺が兄，右辺が弟の，それぞれ持っている鉛筆の本数を表す。

←「ちょうど $\frac{1}{3}$…」から，x は 3 の倍数である。$42=3\times14$

練習 ②40 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x+5|=3$　(2) $|1-3x|=5$　(3) $|x+2|<5$　(4) $|2x-1|\geqq3$

(1) $|x+5|=3$ から　$x+5=\pm3$

すなわち　$x+5=3$ または $x+5=-3$

よって　$\boldsymbol{x=-2,\ -8}$

(2) $|1-3x|=|3x-1|$ であるから，方程式は　$|3x-1|=5$

ゆえに　$3x-1=\pm5$

すなわち　$3x-1=5$ または $3x-1=-5$

よって　$\boldsymbol{x=2,\ -\frac{4}{3}}$

(3) $|x+2|<5$ から　$-5<x+2<5$

各辺に -2 を加えて　$\boldsymbol{-7<x<3}$

(4) $|2x-1|\geqq3$ から　$2x-1\leqq-3$，$3\leqq2x-1$

各辺に 1 を加えて　$2x\leqq-2$，$4\leqq2x$

各辺を 2 で割って　$\boldsymbol{x\leqq-1,\ 2\leqq x}$

←$c>0$ のとき，方程式 $|x|=c$ の解は $x=\pm c$

←$|-A|=|A|$ を利用して x の係数を正の数にしておくと解きやすくなる。

←$c>0$ のとき，
不等式 $|x|<c$ の解は
$-c<x<c$
不等式 $|x|>c$ の解は
$x<-c$，$c<x$

練習 ③41 次の方程式を解け。

(1) $2|x-1|=3x$　(2) $2|x+1|-|x-3|=2x$

(1) [1] $x\geqq1$ のとき，方程式は　$2(x-1)=3x$

すなわち　$2x-2=3x$

これを解いて　$x=-2$　$x=-2$ は $x\geqq1$ を満たさない。

[2] $x<1$ のとき，方程式は　$-2(x-1)=3x$

すなわち　$-2x+2=3x$

←場合の分かれ目は　| | 内の式$=0$ となる x の値。(1) では，$x-1=0$ を解くと　$x=1$
〰〰 のように，場合分けの条件を満たすか満たさないかを必ず確認する。

これを解いて　$x=\frac{2}{5}$　$x=\frac{2}{5}$ は $x<1$ を満たす。

[1]，[2] から，求める解は　$\boldsymbol{x=\frac{2}{5}}$

(2) [1] $x<-1$ のとき，方程式は　$-2(x+1)+(x-3)=2x$

すなわち　$-x-5=2x$

これを解いて　$x=-\frac{5}{3}$

$x=-\frac{5}{3}$ は $x<-1$ を満たす。

[2] $-1\leqq x<3$ のとき，方程式は　$2(x+1)+(x-3)=2x$

すなわち　$3x-1=2x$

これを解いて　$x=1$　$x=1$ は $-1\leqq x<3$ を満たす。

[3] $3\leqq x$ のとき，方程式は　$2(x+1)-(x-3)=2x$

すなわち　$x+5=2x$

これを解いて　$x=5$　$x=5$ は $3\leqq x$ を満たす。

以上から，求める解は

$$\boldsymbol{x=-\frac{5}{3},\ 1,\ 5}$$

←$x+1<0$，$x-3<0$

←$x+1\geqq0$，$x-3<0$

←$x+1>0$，$x-3\geqq0$

練習 ③42 次の不等式を解け。

(1) $3|x+1|<x+5$　(2) $|x+2|-|x-1|>x$

(1) [1] $x\geqq-1$ のとき，不等式は　$3(x+1)<x+5$

これを解いて　$x<1$

$x\geqq-1$ との共通範囲は　$-1\leqq x<1$ …… ①

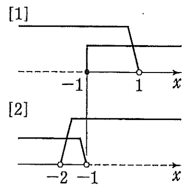
[2] $x<-1$ のとき，不等式は　$-3(x+1)<x+5$

これを解いて　$x>-2$

$x<-1$ との共通範囲は　$-2<x<-1$ …… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で

$\boldsymbol{-2<x<1}$



(2) [1] $x<-2$ のとき，不等式は　$-(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x<-3$

$x<-2$ との共通範囲は　$x<-3$ …… ①

[2] $-2\leqq x<1$ のとき，不等式は　$(x+2)+(x-1)>x$

よって　$x>-1$

$-2\leqq x<1$ との共通範囲は　$-1<x<1$ …… ②

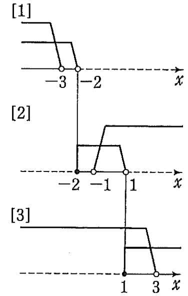
[3] $1\leqq x$ のとき，不等式は　$(x+2)-(x-1)>x$

よって　$x<3$

$1\leqq x$ との共通範囲は　$1\leqq x<3$ …… ③

求める解は，①〜③ を合わせた範囲で

$\boldsymbol{x<-3,\ -1<x<3}$



練習 ③43 次の方程式・不等式を解け。

(1) $||x-1|-2|-3=0$　　(2) $|x-5|\leqq\frac{2}{3}|x|+1$

(1) [1] $x\geqq1$ のとき，方程式は　$|(x-1)-2|-3=0$

すなわち　$|x-3|=3$　　よって　$x-3=\pm3$

ゆえに　$x=6,\ 0$

これらのうち，$x\geqq1$ を満たすのは　$x=6$

[2] $x<1$ のとき，方程式は　$|-(x-1)-2|-3=0$

すなわち　$|x+1|=3$　　よって　$x+1=\pm3$

ゆえに　$x=2,\ -4$

これらのうち，$x<1$ を満たすのは　$x=-4$

以上から，求める解は　$\boldsymbol{x=6,\ -4}$

別解 $||x-1|-2|=3$ から　$|x-1|-2=\pm3$

よって　$|x-1|=5,\ -1$

$|x-1|=5$ から　$x-1=\pm5$　これを解いて　$x=6,\ -4$

$|x-1|=-1$ を満たす x は存在しない。

以上から，求める解は　$\boldsymbol{x=6,\ -4}$

←$c>0$ のとき，方程式 $|x|=c$ の解は $x=\pm c$

←$|-x-1|=|x+1|$

←外側の絶対値記号からはずす方針。

←(左辺)$\geqq0$，(右辺)<0

(2) $|x-5|\leqq\frac{2}{3}|x|+1$ から　$3|x-5|\leqq2|x|+3$

[1] $x<0$ のとき，不等式は　$-3(x-5)\leqq-2x+3$

ゆえに　$-x\leqq-12$　　よって　$x\geqq12$

これは $x<0$ を満たさない。

[2] $0\leqq x<5$ のとき，不等式は　$-3(x-5)\leqq2x+3$

ゆえに　$-5x\leqq-12$　　よって　$x\geqq\frac{12}{5}$

$0\leqq x<5$ との共通範囲は　$\frac{12}{5}\leqq x<5$ …… ①

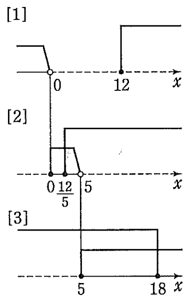
[3] $5\leqq x$ のとき，不等式は　$3(x-5)\leqq2x+3$

これを解いて　$x\leqq18$

$5\leqq x$ との共通範囲は　$5\leqq x\leqq18$ …… ②

求める解は，① と ② を合わせた範囲で　$\boldsymbol{\frac{12}{5}\leqq x\leqq18}$

←両辺に 3 を掛ける。



EX ②1 $P=-2x^2+2x-5$，$Q=3x^2-x$，$R=-x^2-x+5$ のとき，次の式を計算せよ。

$3P-[2\{Q-(2R-P)\}-3(Q-R)]$

$3P-[2\{Q-(2R-P)\}-3(Q-R)]$

$=3P-\{2(Q-2R+P)-3Q+3R\}$

$=3P-(2Q-4R+2P-3Q+3R)$

$=3P-(2P-Q-R)=P+Q+R$

$=(-2x^2+2x-5)+(3x^2-x)+(-x^2-x+5)=\boldsymbol{0}$

←括弧は内側からはずしていき，残す括弧も [ ] →{ } →( ) の順に変えていく。

EX ③2 (1) $3x^2-2x+1$ との和が x^2-x になる式を求めよ。

(2) ある多項式に $a^3+2a^2b-5ab^2+5b^3$ を加えるところを誤って引いたので，答えが $-a^3-4a^2b+10ab^2-9b^3$ になった。正しい答えを求めよ。

HINT (2) ある多項式を P とし，条件を式に表して P を求める。ただし，この P を正しい答えとしては誤り！

(1) 求める式を P とすると　$P+(3x^2-2x+1)=x^2-x$

ゆえに　$P=x^2-x-(3x^2-2x+1)=\boldsymbol{-2x^2+x-1}$

(2) ある多項式を P とすると，題意から

$P-(a^3+2a^2b-5ab^2+5b^3)=-a^3-4a^2b+10ab^2-9b^3$

したがって

$P=-a^3-4a^2b+10ab^2-9b^3+(a^3+2a^2b-5ab^2+5b^3)$

$=-2a^2b+5ab^2-4b^3$

よって，正しい答えは

$P+(a^3+2a^2b-5ab^2+5b^3)$

$=-2a^2b+5ab^2-4b^3+a^3+2a^2b-5ab^2+5b^3$

$=\boldsymbol{a^3+b^3}$

別解 ある多項式を P とし，$a^3+2a^2b-5ab^2+5b^3=Q$，$-a^3-4a^2b+10ab^2-9b^3=R$ としたとき，$P+Q$ を計算するところを，誤って $P-Q=R$ を計算したのであるから，正しい答えは

$P+Q=R+2Q$

$=-a^3-4a^2b+10ab^2-9b^3+2a^3+4a^2b-10ab^2+10b^3$

$=\boldsymbol{a^3+b^3}$

←P と Q との和が R → $P+Q=R$ よって $P=R-Q$

←P について解く。

←$P+Q=P-Q+2Q$ $=R+2Q$

EX ②3 次の計算をせよ。

(1) $5xy^2\times(-2x^2y)^3$　　(2) $2a^2b\times(-3ab)^2\times(-a^2b^2)^3$

(3) $(-2a^2b)^3(3a^3b^2)^2$　　(4) $(-2ax^3y)^2(-3ab^2xy^3)$　　[(1) 上武大]

(1) $5xy^2\times(-2x^2y)^3=5xy^2\times(-2)^3(x^2)^3y^3=5xy^2\times(-8)x^{2\times3}y^3$

$=5xy^2\times(-8)x^6y^3=5\cdot(-8)x^{1+6}y^{2+3}$

$=\boldsymbol{-40x^7y^5}$

(2) $2a^2b\times(-3ab)^2\times(-a^2b^2)^3$

$=2a^2b\times(-3)^2a^2b^2\times(-1)^3(a^2)^3(b^2)^3$

$=2a^2b\times9a^2b^2\times(-1)a^{2\times3}b^{2\times3}=2a^2b\times9a^2b^2\times(-1)a^6b^6$

$=2\cdot9\cdot(-1)a^{2+2+6}b^{1+2+6}=\boldsymbol{-18a^{10}b^9}$

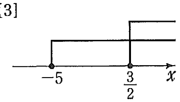
←**指数法則**
m，n が自然数のとき
$\boldsymbol{a^ma^n=a^{m+n}}$，
$\boldsymbol{(a^m)^n=a^{mn}}$，
$\boldsymbol{(ab)^n=a^nb^n}$

[3] $\dfrac{3}{2}\leqq x$ のとき，不等式は　$2x-3\leqq 3x+2$

ゆえに　$-x\leqq 5$　よって　$x\geqq -5$

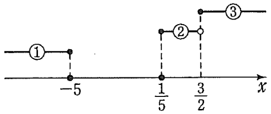
$\dfrac{3}{2}\leqq x$ との共通範囲は　$\dfrac{3}{2}\leqq x$ …… ③

[3]



求める解は，①と②と③を合わせた範囲であるから

$x\leqq -5,\ \dfrac{1}{5}\leqq x$



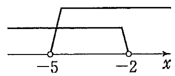
(4) [1] $x<-2$ のとき，不等式は　$-2(x+2)-(x-4)<15$

ゆえに　$-2x-4-x+4<15$

よって　$x>-5$

$x<-2$ との共通範囲は　$-5<x<-2$ …… ①

[1]



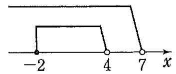
[2] $-2\leqq x<4$ のとき，不等式は　$2(x+2)-(x-4)<15$

ゆえに　$2x+4-x+4<15$

よって　$x<7$

$-2\leqq x<4$ との共通範囲は　$-2\leqq x<4$ …… ②

[2]

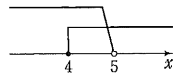


[3] $4\leqq x$ のとき，不等式は　$2(x+2)+(x-4)<15$

ゆえに　$2x+4+x-4<15$　よって　$x<5$

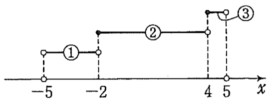
$4\leqq x$ との共通範囲は　$4\leqq x<5$ …… ③

[3]



求める解は，①と②と③を合わせた範囲であるから

$-5<x<5$



練習 ①44　(1) 1桁の自然数のうち，4の倍数であるもの全体の集合を A とする。次の $\square$ の中に，$\in$ または $\notin$ のいずれか適するものを書き入れよ。

(ア) $6\ \square\ A$　(イ) $8\ \square\ A$　(ウ) $12\ \square\ A$

(2) 次の集合を，要素を書き並べて表せ。

(ア) $A=\{x\mid -3<x<2,\ x$ は整数$\}$　(イ) $B=\{x\mid x$ は32の正の約数$\}$

(3) 3つの集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{x\mid x$ は4未満の自然数$\}$，$C=\{x\mid x$ は6の正の約数$\}$ について，次の $\square$ の中に，$\subset$，$\supset$，$=$ のうち，最も適するものを書き入れよ。

(ア) $A\ \square\ B$　(イ) $B\ \square\ C$　(ウ) $A\ \square\ C$

(1) (ア) 6は4の倍数ではないから　$6\notin A$　←$6=4\cdot 1+2$

(イ) 8は1桁の自然数であり，かつ，4の倍数であるから

$8\in A$

(ウ) 12は1桁の自然数ではないから

$12\notin A$　←12は4の倍数ではあるが，全体集合に含まれていない。

参考　$A=\{4,\ 8\}$ と要素を書き並べて表して，6，8，12 が A に属するかどうかを判断してもよい。

(2) (ア) $A=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$　←{ }を用いて表す。$-3\notin A$，$2\notin A$

(イ) $B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$

(3) $B=\{1,\ 2,\ 3\}$，$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ である。←要素を書き並べる。

(ア) A の要素と B の要素は完全に一致しているから　$A=B$　←$A=B=\{1,\ 2,\ 3\}$

(イ) B の要素はすべて C に属し，C の要素6は B に属さない。←$B=\{1,\ 2,\ 3\}$，$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

よって　$B\subset C$

(ウ) A の要素はすべて C に属し，C の要素6は A に属さない。←$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

よって　$A\subset C$

別解　(ア)より $A=B$，(イ)より $B\subset C$　であるから　$A\subset C$

練習 ①45　全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 A，B について

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,\ 2,\ 5,\ 8\}$，$A\cap B=\{3\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,\ 7,\ 10\}$

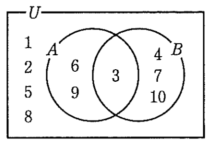
がわかっている。このとき，A，B，$A\cap\overline{B}$ を求めよ。　[昭和薬大]

与えられた集合の要素を図に書き込むと，右のようになるから

$A=\{3,\ 6,\ 9\}$

$B=\{3,\ 4,\ 7,\ 10\}$

$A\cap\overline{B}=\{6,\ 9\}$



←Ⓘ 集合の問題　図（ベン図）を作る

練習 ②46　実数全体を全体集合とし，その部分集合 A，B，C について，次の問いに答えよ。

(1) $A=\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}$，$B=\{x\mid 2x-8>0\}$，$C=\{x\mid -2<x<5\}$ とするとき，次の集合を求めよ。

(ア) $\overline{B}$　(イ) $A\cap\overline{B}$　(ウ) $\overline{B}\cup C$

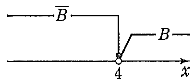
(2) $A=\{x\mid -2\leqq x\leqq 3\}$，$B=\{x\mid k-6\leqq x\leqq k\}$（$k$ は定数）とするとき，$A\subset B$ となる k の値の範囲を求めよ。

(1) (ア) $2x-8>0$ を解くと

$x>4$

よって　$B=\{x\mid x>4\}$

ゆえに　$\overline{B}=\{x\mid x\leqq 4\}$

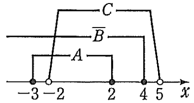


(イ) 右の図から

$A\cap\overline{B}=\{x\mid -3\leqq x\leqq 2\}$

(ウ) 右の図から

$\overline{B}\cup C=\{x\mid x<5\}$



←(イ) $A\subset\overline{B}$ であるから，$A\cap\overline{B}=A$ となる。

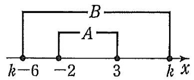
(2) $A\subset B$ が成り立つとき，A，B を数直線上に表すと，右の図のようになる。

ゆえに，$A\subset B$ となるための条件は

$k-6\leqq -2$ … ①，$3\leqq k$ … ②

が同時に成り立つことである。

① から　$k\leqq 4$　これと ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{3\leqq k\leqq 4}$



←左の図のように数直線をかいて考えるとよい。

練習 ③47 1 から 1000 までの整数全体の集合を全体集合 U とし，その部分集合 A，B，C を

$A=\{n\mid n$ は奇数，$n\in U\}$，$B=\{n\mid n$ は 3 の倍数でない，$n\in U\}$，

$C=\{n\mid n$ は 18 の倍数でない，$n\in U\}$

とする。このとき，$A\cup B\subset C$ であることを示せ。

$\overline{A}=\{n\mid n$ は偶数，$n\in U\}$，$\overline{B}=\{n\mid n$ は 3 の倍数，$n\in U\}$

偶数かつ 3 の倍数である数は 6 の倍数であるから

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{n\mid n$ は 6 の倍数，$n\in U\}$

また，$\overline{C}=\{n\mid n$ は 18 の倍数，$n\in U\}$ であり，18 の倍数は 6 の倍数であるから　$\overline{C}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$

ド・モルガンの法則により，$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ であるから

$\overline{C}\subset\overline{A\cup B}$

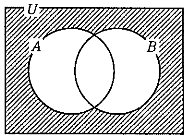
よって　$C\supset A\cup B$　すなわち　$A\cup B\subset C$

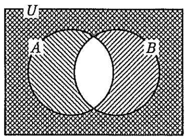
←B，C は要素の条件が「～でない」の形で与えられていて考えにくい。このことも補集合を考えることの着目点となる。

←$\overline{Q}\subset\overline{P} \iff Q\supset P$

検討　ド・モルガンの法則 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ が成り立つことは，図を用いて確認できる。

まず，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ について，$\overline{A\cup B}$ は図 (a) の斜線部分，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は図 (b) の二重の斜線部分である。

(a)


(b)


←(a) の斜線部分 が $\overline{A\cup B}$

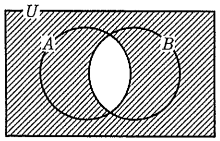
(b) の 部分が $\overline{A}$，部分が $\overline{B}$

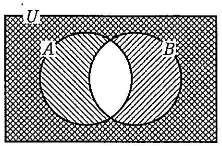
重なり合った 部分が $\overline{A}\cap\overline{B}$

図 (a) の斜線部分と図 (b) の二重の斜線部分が一致するから

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

また，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ について，$\overline{A\cap B}$ は図 (c) の斜線部分，$\overline{A}\cup\overline{B}$ は図 (d) の斜線部分である。

(c)


(d)


←(c) の斜線部分 が $\overline{A\cap B}$

(d) の 部分が $\overline{A}$，部分が $\overline{B}$

合わせて $\overline{A}\cup\overline{B}$

図 (c)，図 (d) それぞれの斜線部分が一致するから

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

練習 ③48 $U=\{x\mid x$ は実数$\}$ を全体集合とする。U の部分集合 $A=\{2,\ 4,\ a^2+1\}$，$B=\{4,\ a+7,\ a^2-4a+5\}$ について，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ となるとき，定数 a の値を求めよ。

〔富山県大〕

$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ であるから　$5\in A$

よって　$a^2+1=5$　ゆえに　$a=\pm 2$

[1] $a=2$ のとき　$a+7=9$，$a^2-4a+5=1$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 9,\ 1\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2,\ 5\}$ となり，条件に適する。

[2] $a=-2$ のとき　$a+7=5$，$a^2-4a+5=17$

よって　$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{4,\ 5,\ 17\}$

このとき，$A\cap\overline{B}=\{2\}$ となり，条件に適さない。

以上から　$\boldsymbol{a=2}$

←$A\cap\overline{B}=\{x\mid x\in A$ かつ $x\in\overline{B}\}$

←$2\notin B$，$4\in B$，$5\notin B$ であるから $2\in\overline{B}$，$4\notin\overline{B}$，$5\in\overline{B}$

←$2\notin B$，$4\in B$，$5\in B$ であるから $2\in\overline{B}$，$4\notin\overline{B}$，$5\notin\overline{B}$

練習 ②49 30 以下の自然数全体を全体集合 U とし，U の要素のうち，偶数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B，5 の倍数全体の集合を C とする。次の集合を求めよ。

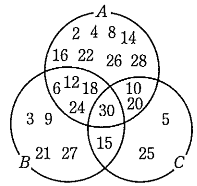
(1) $A\cap B\cap C$　(2) $A\cap(B\cup C)$　(3) $(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C$

(1) $A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \cdots\cdots,\ 30\}$，

$B=\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ 27,\ 30\}$，

$C=\{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ 30\}$

よって　$A\cap B\cap C=\{\boldsymbol{30}\}$



←A，B，C すべてに属する要素は 30 のみ。

(2) $B\cup C$

$=\{3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 21,\ 24,\ 25,\ 27,\ 30\}$

よって　$A\cap(B\cup C)=\{\boldsymbol{6,\ 10,\ 12,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30}\}$

←$B\cup C$ の要素のうち，偶数であるものを書き上げる。

(3) $A\cap B=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ 30\}$ であるから

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap C=(\overline{A\cap B})\cap C$

$=\{\boldsymbol{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25}\}$

←C の要素のうち，$A\cap B$ の要素でない，すなわち 6 の倍数でないものを書き上げる。

練習 ④50 次のことを証明せよ。ただし，Z は整数全体の集合とする。

(1) $A=\{3n-1\mid n\in Z\}$，$B=\{6n+5\mid n\in Z\}$ ならば　$A\supset B$

(2) $A=\{2n-1\mid n\in Z\}$，$B=\{2n+1\mid n\in Z\}$ ならば　$A=B$

(1) $x\in B$ とすると，$x=6n+5$ (n は整数) と書くことができる。

このとき　$x=6(n+1)-1=3\cdot 2(n+1)-1$

$2(n+1)=m$ とおくと，m は整数で　$x=3m-1$

ゆえに　$x\in A$

よって，$x\in B$ ならば $x\in A$ が成り立つから　$A\supset B$

←$x\in A$ を示すために，$6n+5$ を $3\times$(整数)-1 の形にする。

(2) $x\in A$ とすると，$x=2n-1$ (n は整数) と書くことができる。

このとき　$x=2(n-1)+1$

$n-1=k$ とおくと，k は整数で　$x=2k+1$

←$x\in B$ を示すために，$2n-1$ を $2\times$(整数)$+1$ の形にする。

ゆえに　　$x \in B$

よって，$x \in A$ ならば $x \in B$ が成り立つから　　$A \subset B$ …… ①

次に，$x \in B$ とすると，$x=2n+1$ (n は整数) と書くことができる。このとき　　$x=2(n+1)-1$

$n+1=l$ とおくと，l は整数で　　$x=2l-1$

ゆえに　　$x \in A$

よって，$x \in B$ ならば $x \in A$ が成り立つから　　$B \subset A$ …… ②

①，②から　　$A=B$

←$x \in A$ を示すために，$2n+1$ を $2\times$(整数)-1 の形にする。

←$A \subset B$ かつ $B \subset A$

練習 ①51 次の命題の真偽を調べよ。ただし，m，n は自然数，x，y は実数とする。

(1) n が 8 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。
(2) $m+n$ が偶数ならば，m，n はともに偶数である。
(3) xy が有理数ならば，x，y はともに有理数である。
(4) x，y がともに有理数ならば，xy は有理数である。

HINT (3)，(4) 有理数は，分数 $\dfrac{m}{n}$ (m，n は整数，$n \neq 0$) の形に表される数である。
無理数は，有理数でない実数。$\sqrt{2}$ や π など。

(1) 真

(証明) n が 8 の倍数のとき，$n=8k$ (k は自然数) と表される。このとき，$n=4 \cdot 2k$ で，$2k$ は自然数であるから，n は 4 の倍数である。

←自然数 n が m の倍数であるとき，$n=mk$ (k は自然数) と表される。

(2) 偽

(反例) $m=1$，$n=1$ のとき，$m+n=2$ (偶数) であるが，m，n は奇数である。

(3) 偽

(反例) $x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき，$xy=2$ (有理数) であるが，x，y は無理数である。

(4) 真

(証明) x，y が有理数のとき，

$$x=\frac{p}{q},\ y=\frac{r}{s}\ (p,\ q,\ r,\ s \text{ は整数で，} q \neq 0,\ s \neq 0)$$

と表される。

このとき，$xy=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{r}{s}=\dfrac{pr}{qs}$ となり，pr，qs は整数で $qs \neq 0$ であるから，xy は有理数である。

検討 (4) は (3) の逆 (仮定と結論を入れ替えた命題。本冊 p.102 参照) である。

練習 ①52 x は実数とする。集合を利用して，次の命題の真偽を調べよ。

(1) $|x|<2$ ならば $-3<x<3$　　(2) $|x-1|>1$ ならば $2|x-2| \geqq 1$

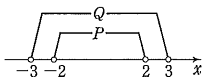
(1) $|x|<2$ から　　$-2<x<2$

$P=\{x \mid -2<x<2\}$，

$Q=\{x \mid -3<x<3\}$

とすると　　$P \subset Q$

ゆえに，与えられた命題は　　真



←$|X|<c\ (c>0)$ $\Longleftrightarrow -c<X<c$

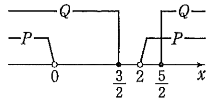
(2) $|x-1|>1$ から　　$x-1<-1$，$1<x-1$

したがって　　$x<0$，$2<x$

また，$2|x-2| \geqq 1$ から　　$|x-2| \geqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$x-2 \leqq -\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2} \leqq x-2$

よって　　$x \leqq \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2} \leqq x$



$P=\{x \mid x<0,\ 2<x\}$，$Q=\left\{x \,\middle|\, x \leqq \dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2} \leqq x\right\}$

とすると，$P \subset Q$ は成り立たない。

ゆえに，与えられた命題は　　偽

←$|X|>c\ (c>0)$ $\Longleftrightarrow X<-c$，$c<X$

←反例は　$x=\dfrac{9}{4}$

練習 ③53 (1) 次の (ア)～(エ) が，命題「$|x| \geqq 3 \Longrightarrow x \geqq 1$」が偽であることを示すための反例であるかどうか，それぞれ答えよ。

(ア) $x=-4$　　(イ) $x=-2$　　(ウ) $x=2$　　(エ) $x=4$

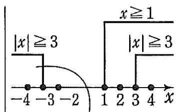
(2) a を整数とする。命題「$a<x<a+8 \Longrightarrow x \leqq 2+3a$」が偽で，$x=4$ がこの命題の反例であるような a のうち，最大のものを求めよ。

(1) (ア) $x=-4$ は，$|-4|=4$ より $|x| \geqq 3$ を満たすが，$x \geqq 1$ を満たさないから，**反例である。**

(イ) $x=-2$ は，$|-2|=2$ より $|x| \geqq 3$ を満たさないから，**反例ではない。**

(ウ) $x=2$ は，$|2|=2$ より $|x| \geqq 3$ を満たさないから，**反例ではない。**

(エ) $x=4$ は，$|4|=4$ より $|x| \geqq 3$ を満たすが，$x \geqq 1$ も満たすから，**反例ではない。**



反例となる範囲

(2) $x=4$ が命題「$a<x<a+8 \Longrightarrow x \leqq 2+3a$」が偽であることを示すための反例であるとき，次の [1]，[2] が成り立つ。

[1] $x=4$ は $a<x<a+8$ を満たす

[2] $x=4$ は $x \leqq 2+3a$ を満たさない

[1] から　　$a<4<a+8$　すなわち　$-4<a<4$ …… ①

[2] から　　$4>2+3a$　　すなわち　$a<\dfrac{2}{3}$　…… ②

①，② の共通範囲は　　$-4<a<\dfrac{2}{3}$

これを満たす整数 a のうち，最大のものは　　$a=0$

←$4<a+8$ から $-4<a$
これと $a<4$ から
$-4<a<4$
また，[2] を言い換えると「$x=4$ は $x>2+3a$ を満たす」となる。

練習 ②54 次の □ に最も適する語句を (ア)～(エ) から選べ。ただし，a，x，y は実数とする。

(1) $xy>0$ は $x>0$ であるための □。　　(2) $a \geqq 0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための □。

(3) △ABC において，∠A$=90°$ は，△ABC が直角三角形であるための □。

(4) A，B を 2 つの集合とする。a が $A \cup B$ の要素であることは，a が A の要素であるための □。

[(4) 摂南大]

(ア) 必要十分条件である　　(イ) 必要条件であるが十分条件ではない

(ウ) 十分条件であるが必要条件ではない　　(エ) 必要条件でも十分条件でもない

(1) 「$xy>0 \Longrightarrow x>0$」は偽。　(反例)　$x=-1,\ y=-2$

「$x>0 \Longrightarrow xy>0$」は偽。　(反例)　$x=1,\ y=-2$

よって　(エ)

(2) $\sqrt{a^2}=|a|$ であり，$a\geqq 0 \Longleftrightarrow |a|=a$ が成り立つから，

「$a\geqq 0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2}=a$」は真。

よって　(ア)

(3) 「△ABC において，$\angle \mathrm{A}=90^\circ \Longrightarrow$ △ABC が直角三角形」は真。

「△ABC が直角三角形 $\Longrightarrow \angle \mathrm{A}=90^\circ$」は偽。

(反例)　$\angle \mathrm{A}=30^\circ$，$\angle \mathrm{B}=90^\circ$，$\angle \mathrm{C}=60^\circ$

よって　(ウ)

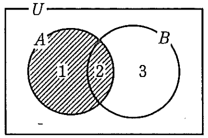
(4) 「$a\in A\cup B \Longrightarrow a\in A$」は偽。

(反例)　$A=\{1,\ 2\}$，$B=\{2,\ 3\}$，$a=3$

また，$A\subset A\cup B$ であるから，

「$a\in A \Longrightarrow a\in A\cup B$」は真。

よって　(イ)



(1) $xy>0 \underset{\times}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} x>0$

(2) $a\geqq 0 \underset{○}{\overset{○}{\rightleftarrows}} \sqrt{a^2}=a$

(3) $\angle \mathrm{A}=90^\circ \underset{\times}{\overset{○}{\rightleftarrows}}$ △ABC が直角三角形

(4) $a\in A\cup B \underset{○}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} a\in A$

(2) 参考　$a<0 \Longleftrightarrow \sqrt{a^2}=-a$ が成り立つ。

練習 ①55

x，y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x\leqq 3$　(2) $x\leqq 3$ かつ $y>2$

(3) x，y の少なくとも一方は 3 である。　(4) $-2<x\leqq 4$

(1) 「$x\leqq 3$」の否定は　$\boldsymbol{x>3}$

(2) 「$x\leqq 3$ かつ $y>2$」の否定は　$\boldsymbol{x>3}$ **または** $\boldsymbol{y\leqq 2}$

(3) 「x，y の少なくとも一方は 3 である」は「$x=3$ または $y=3$」ということであるから，その否定は

$\boldsymbol{x\neq 3}$ **かつ** $\boldsymbol{y\neq 3}$

(4) 「$-2<x\leqq 4$」は「$-2<x$ かつ $x\leqq 4$」ということであるから，その否定は　$\boldsymbol{x\leqq -2}$ **または** $\boldsymbol{4<x}$

(3) 「x も y も 3 ではない」と答えてもよい。

練習 ③56

次の命題の否定を述べよ。また，もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

(1) 少なくとも 1 つの自然数 n について　$n^2-5n-6=0$

(2) すべての実数 x，y について　$9x^2-12xy+4y^2>0$

(3) ある自然数 m，n について　$2m+3n=6$

(1) 否定：「**すべての自然数** $\boldsymbol{n}$ **について**　$\boldsymbol{n^2-5n-6\neq 0}$」

真偽：自然数 $n=6$ に対して　$n^2-5n-6=0$

したがって　**偽**。

もとの命題 の真偽：**真**。($n=6$ のとき　$n^2-5n-6=0$)

(2) 否定：「**ある実数** $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ **について**　$\boldsymbol{9x^2-12xy+4y^2\leqq 0}$」

真偽：$9x^2-12xy+4y^2=0$ とすると　$(3x-2y)^2=0$

ゆえに　$3x=2y$

よって，$x=2$，$y=3$ のとき $9x^2-12xy+4y^2=0$ が成り立つ。

したがって　**真**。

もとの命題 の真偽：**偽**。(反例：$x=2$，$y=3$)

←$n^2-5n-6=0$ を解くと，$(n+1)(n-6)=0$ から　$n=-1,\ 6$

「p が真のとき $\overline{p}$ は偽，p が偽のとき $\overline{p}$ は真」である。

(3) 否定：「**すべての自然数** $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ **について**　$\boldsymbol{2m+3n\neq 6}$」

真偽：$m=1$，$n=1$ のとき　$2m+3n=5\ (\neq 6)$

$m\geqq 2$ のとき，$2m+3n\geqq 2\cdot 2+3\cdot 1=7$ から　$2m+3n\neq 6$

$n\geqq 2$ のとき，$2m+3n\geqq 2\cdot 1+3\cdot 2=8$ から　$2m+3n\neq 6$

したがって　**真**。

もとの命題 の真偽は，否定の真偽を調べたときと同様にして　**偽**。

←n はすべての自然数。

←m はすべての自然数。

2章 練習【集合と命題】

練習 ④57

次の命題の否定を述べよ。

(1) x が実数のとき，$x^3=8$ ならば $x=2$ である。

(2) x，y が実数のとき，$x^2+y^2<1$ ならば $|x|<1$ かつ $|y|<1$ である。

(1) x が実数のとき，「$x^3=8$ ならば $x=2$ である」

の否定は　$\boldsymbol{x^3=8}$ **であって** $\boldsymbol{x\neq 2}$ **である実数** $\boldsymbol{x}$ **がある。**

(2) x，y が実数のとき，

「$x^2+y^2<1$ ならば $|x|<1$ かつ $|y|<1$ である」

の否定は　$\boldsymbol{x^2+y^2<1}$ **であって** $\boldsymbol{|x|\geqq 1}$ **または** $\boldsymbol{|y|\geqq 1}$ **である実数** $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ **がある。**

←命題 $p\Longrightarrow q$ の否定は「p であって q でないものがある」

練習 ②58

x，y は実数とする。次の命題の逆・対偶・裏を述べ，その真偽をいえ。

(1) $x+y=5 \Longrightarrow x=2$ かつ $y=3$

(2) xy が無理数ならば，x，y の少なくとも一方は無理数である。

(1) 逆：「$\boldsymbol{x=2}$ **かつ** $\boldsymbol{y=3 \Longrightarrow x+y=5}$」

これは明らかに成り立つから　**真**。

対偶：「$\boldsymbol{x\neq 2}$ **または** $\boldsymbol{y\neq 3 \Longrightarrow x+y\neq 5}$」

これは **偽**。(反例)　$x=1$，$y=4$

裏：「$\boldsymbol{x+y\neq 5 \Longrightarrow x\neq 2}$ **または** $\boldsymbol{y\neq 3}$」

裏の対偶，すなわち逆が真であるから　**真**。

(2) 逆：「$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ **の少なくとも一方が無理数ならば，**$\boldsymbol{xy}$ **は無理数である**」

これは **偽**。(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=0$

対偶：「$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ **がともに有理数ならば，**$\boldsymbol{xy}$ **は有理数である**」

これは **真**。

(証明)　$x=\dfrac{p}{q}$，$y=\dfrac{r}{s}$ (p，q，r，s は整数；$qs\neq 0$) とおくと

$$xy=\frac{pr}{qs}$$

ここで，pr，qs はいずれも整数で，$qs\neq 0$ である。

よって，xy は有理数である。

裏：「$\boldsymbol{xy}$ **が有理数ならば，**$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ **はともに有理数である**」

これは **偽**。(反例)　$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$

←$\overline{p\text{ かつ }q}$ は，$\overline{p}$ または $\overline{q}$ と同じ。

←$\overline{p\text{ または }q}$ は，$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$ と同じ。

練習 ②59 対偶を考えることにより，次の命題を証明せよ。
整数 m，n について，m^2+n^2 が奇数ならば，積 mn は偶数である。

与えられた命題の対偶は
「積 mn が奇数ならば，m^2+n^2 は偶数である」である。
mn が奇数ならば，m，n はともに奇数であり

$$m=2k+1,\ n=2l+1\quad (k,\ l \text{ は整数})$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned}m^2+n^2&=(2k+1)^2+(2l+1)^2\\&=(4k^2+4k+1)+(4l^2+4l+1)\\&=2(2k^2+2l^2+2k+2l+1)\end{aligned}$$

$2k^2+2l^2+2k+2l+1$ は整数であるから，m^2+n^2 は偶数である。
よって，対偶は真である。
したがって，もとの命題も真である。

> ←奇数は 2 で割ったときの余りが 1 である。
>
> ←2×(整数) の形。

練習 ③60 対偶を考えることにより，次の命題を証明せよ。ただし，a，b，c は整数とする。
(1) $a^2+b^2+c^2$ が偶数ならば，a，b，c のうち少なくとも 1 つは偶数である。
(2) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ が奇数ならば，a，b，c のうち奇数の個数は 1 個または 2 個である。〔類 東北学院大〕

(1) 与えられた命題の対偶は
「a，b，c がすべて奇数ならば，$a^2+b^2+c^2$ は奇数である」
である。
a，b，c がすべて奇数ならば，整数 l，m，n を用いて

$$a=2l+1,\ b=2m+1,\ c=2n+1$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&=(2l+1)^2+(2m+1)^2+(2n+1)^2\\&=2(2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1)+1\end{aligned}$$

$2l^2+2m^2+2n^2+2l+2m+2n+1$ は整数であるから，
$a^2+b^2+c^2$ は奇数である。
よって，対偶は真であるから，もとの命題も真である。

> ←2×(整数)+1 の形にして，奇数であることを示す。

(2) 与えられた命題の対偶は
「a，b，c がすべて偶数またはすべて奇数ならば，
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ は偶数である」
である。

> ←「a，b，c のうち奇数は 1 個または 2 個」の否定は，「a，b，c のうち奇数が 0 個または 3 個」である。よって，
> 奇数が 0 個（[1]），
> 奇数が 3 個（[2]）
> の場合に分けて証明する。

[1] a，b，c がすべて偶数のとき
整数 p，q，r を用いて

$$a=2p,\ b=2q,\ c=2r$$

と表される。
このとき

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=4p^2+4q^2+4r^2-4pq-4qr-4rp\\&=2(2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp)\ \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp$ は整数であるから，① は偶数である。

[2] a，b，c がすべて奇数のとき
整数 l，m，n を用いて

$$a=2l+1,\ b=2m+1,\ c=2n+1$$

と表される。
また，(1) で示したことから，整数 s を用いて
$a^2+b^2+c^2=2s+1$ と表される。
このとき

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\\&=2s+1-(2l+1)(2m+1)-(2m+1)(2n+1)-(2n+1)(2l+1)\\&=2(s-2lm-l-m-2mn-m-n-2nl-n-l-1)\\&=2(s-2lm-2mn-2nl-2l-2m-2n-1)\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$s-2lm-2mn-2nl-2l-2m-2n-1$ は整数であるから，② は偶数である。
よって，[1]，[2] のいずれの場合も，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ は偶数である。
したがって，対偶は真であるから，もとの命題も真である。

> 参考 [1]，[2] において，
> $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
> を利用して，$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ が偶数であることを示してもよい。

2章 練習 [集合と命題]

練習 ②61 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて，$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数でないと仮定すると，r を有理数として
$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}=r$ とおける。

両辺を 2 乗すると $\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{6}=r^2$

よって $\quad \sqrt{3}=3r^2-2\ \cdots\cdots ①$

ここで，r は有理数であるから，$3r^2-2$ も有理数である。
ゆえに，① は $\sqrt{3}$ が無理数であることに矛盾する。
したがって，$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$ は無理数である。

> ←$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}$ は実数であり，無理数でないと仮定しているから，有理数である。
>
> ←$\frac{\sqrt{3}}{3}=r^2-\frac{2}{3}$
>
> ←$\sqrt{3}=$(r の式)［有理数］の形に変形。

練習 ③62 命題「整数 n が 5 の倍数でなければ，n^2 は 5 の倍数ではない。」が真であることを証明せよ。
また，この命題を用いて $\sqrt{5}$ は有理数でないことを背理法により証明せよ。

整数 n が 5 の倍数でないとき，k を整数として，
$n=5k+l$ ($l=1,\ 2,\ 3,\ 4$) とおける。このとき

$$\begin{aligned}n^2&=(5k+l)^2=25k^2+10kl+l^2\\&=5(5k^2+2kl)+l^2\end{aligned}$$

ここで，$5k^2+2kl$ は整数である。
また，l^2 は 1，4，9，16 のいずれかであるが，どれも 5 の倍数でない。
ゆえに，n^2 は 5 の倍数ではない。

> ←(5 の倍数)+(5 の倍数でない数) の形の数は，5 の倍数ではない。

次に，$\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると

$$\sqrt{5}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q \text{ は互いに素である自然数})$$

と表される。

このとき　　　　$p=\sqrt{5}\,q$

両辺を 2 乗すると　　$p^2=5q^2$ …… ①

ゆえに，p^2 は 5 の倍数である。

ここで，前半の命題は真であり，真である命題の対偶は真であるから，p は 5 の倍数である。

よって，$p=5r$（r は自然数）とおいて，① に代入すると

$$(5r)^2=5q^2 \quad すなわち \quad q^2=5r^2$$

ゆえに，q^2 が 5 の倍数であるから q も 5 の倍数となり，p と q が互いに素であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{5}$ は有理数でない。

←p と q は 1 以外に正の公約数をもたない自然数。

←(前半)の命題の対偶「n が整数で，n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数」が真であることを利用。

←p と q は公約数 5 をもつことになってしまう。

練習 ③63　(1) $x+4\sqrt{2}\,y-6y-12\sqrt{2}+16=0$ を満たす有理数 x，y の値を求めよ。　〔(1) 武庫川女子大〕

(2) a，b を有理数の定数とする。$-1+\sqrt{2}$ が方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の 1 つであるとき，a，b の値を求めよ。

(1) 与式を変形して　　$x-6y+16+(4y-12)\sqrt{2}=0$

ここで，x，y は有理数であるから，$x-6y+16$，$4y-12$ も有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数である。

よって　　　$x-6y+16=0$，$4y-12=0$

これを解いて　　$x=2$，$y=3$

←$a+b\sqrt{2}=0$ の形に。

←この断りは重要！

←a，b が有理数，$\sqrt{l}$ が無理数ならば $a+b\sqrt{l}=0 \iff a=b=0$

(2) $x=-1+\sqrt{2}$ が解であるから，

$$(-1+\sqrt{2})^2+a(-1+\sqrt{2})+b=0$$

整理すると　　$-a+b+3+(a-2)\sqrt{2}=0$

ここで，a，b は有理数であるから，$-a+b+3$，$a-2$ も有理数であり，$\sqrt{2}$ は無理数である。

よって　　　$-a+b+3=0$，$a-2=0$

これを解いて　　$a=2$，$b=-1$

検討　$a=2$，$b=-1$ のとき，方程式は　　$x^2+2x-1=0$

解は $x=-1\pm\sqrt{2}$ で，$x=-1+\sqrt{2}$ 以外の解は

$$x=-1-\sqrt{2}$$

一般に，有理数係数の 2 次方程式が $p+q\sqrt{l}$（p，q は有理数，$\sqrt{l}$ は無理数）を解にもつとき $p-q\sqrt{l}$ も解であることが知られている。

←代入すると等式が成り立つ。

←この断りは重要！

←「有理数係数」が重要。なお，3 次以上の方程式でも成り立つことが知られている。

EX ①36　N を自然数全体の集合とする。

(1) 「1 は N の要素である」を，集合の記号を用いて表せ。

(2) 「1 のみを要素にもつ集合は，N の部分集合である」を，集合の記号を用いて表せ。

(1) $1\in N$

(2) 「1 のみを要素にもつ集合」は $\{1\}$ と表されるから

$$\{1\}\subset N$$

検討　(1) $N\ni 1$　(2) $N\supset\{1\}$　と書いてもよい。

なお，(1) $1\subset N$ は誤り。　←1 は集合ではない。

(2) $\{1\}\in N$ は誤り。　←$\{1\}$ は要素ではない。

$a\in A$ ……
a は集合 A の要素である。
$A\subset B$ ……
集合 A は集合 B の部分集合である。集合 A は集合 B に含まれる。

EX ①37　Z は整数全体の集合とする。次の集合を，要素を書き並べて表せ。

$$A=\{x\,|\,0<x<6,\ x\in Z\},\quad B=\{2x\,|\,-1\leqq x\leqq 3,\ x\in Z\}$$

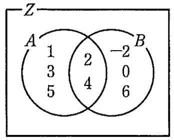
また，$A\cap B$，$A\cup B$，$\overline{A}\cap B$ を，要素を書き並べて表せ。

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，　$B=\{-2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6\}$

したがって　　$A\cap B=\{2,\ 4\}$，

$A\cup B=\{-2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，

$\overline{A}\cap B=\{-2,\ 0,\ 6\}$



EX ①38　$P=\{a,\ b,\ c,\ d\}$ の部分集合をすべて求めよ。

$\varnothing$ や P 自身も P の部分集合であるから，以下の 16 個である。

$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{d\}$，$\{a,\ b\}$，$\{a,\ c\}$，$\{a,\ d\}$，$\{b,\ c\}$，$\{b,\ d\}$，$\{c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c\}$，$\{a,\ b,\ d\}$，$\{a,\ c,\ d\}$，$\{b,\ c,\ d\}$，$\{a,\ b,\ c,\ d\}$

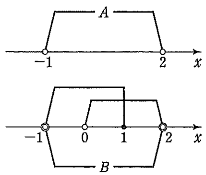
←$\{\varnothing\}$ としないこと。

EX ②39　次の集合 A，B には，$A\subset B$，$A=B$，$A\supset B$ のうち，どの関係があるか。

$$A=\{x\,|\,-1<x<2,\ x \text{ は実数}\},\quad B=\{x\,|\,-1<x\leqq 1 \text{ または } 0<x<2,\ x \text{ は実数}\}$$

右の図より，A の x の範囲と B の x の範囲が一致するから

$$A=B$$



←数直線ではっきりする。

検討　$A=B$ は，図から明らかであるが，一般に $A=B$ であることを示すには $A\subset B$ かつ $B\subset A$ が成り立つことを示す（本冊 $p.89$ 参照）。

EX ②40　U を 1 から 9 までの自然数の集合とする。U の部分集合 A，B，C について，以下が成り立つ。

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A\cup C=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9\}$，

$B\cup C=\{1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$，$A\cap B=\{4,\ 9\}$，$A\cap C=\{7\}$，$B\cap C=\{1\}$，$A\cap B\cap C=\varnothing$

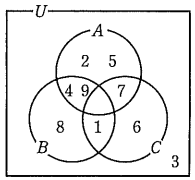
(1) 集合 $\overline{B}\cap\overline{C}$ を求めよ。　(2) 集合 $A\cap(\overline{B\cup C})$，$A$ を求めよ。　〔類 東京国際大〕

与えられた条件から，集合 A，B，C の要素を調べて図に書き込むと，右のようになる。よって，図から

(1) $\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}=\{2,\ 3,\ 5\}$

(2) $A\cap(\overline{B\cup C})=\{2,\ 5\}$，

$A=\{2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9\}$



←まず $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}=\{3\}$ がわかる。他に $A\cup B$ と $B\cup C$ の要素から $2\in A$，$5\in A$ であるが $2\notin B$，$5\notin B$ など。