

1. 多項式の加法・減法・乗法

基本例題 2

$A = x^2 + 3y^2 - 2xy$, $B = y^2 + 3xy - 2x^2$, $C = -3x^2 + xy - 4y^2$ であるとき、次の計算をせよ。

(1) $A + B$

(2) $2a^2 - ab - b^2 + 4ab + 3a^2 + 2b^2$ [b]

(3) $x^3 - 2ax^2y + 4xy - 3by + y^2 + 2xy - 2by + 4a$ [x と y], [y]

練習(基本) 1 (1) 多項式 $-2x + 3y + x^2 + 5x - y$ の同類項をまとめよ。

(2) 次の多項式において、[] 内の文字に着目したとき、その次数と定数項をいえ。

(ア) $x - 2xy + 3y^2 + 4 - 2x - 7xy + 2y^2 - 1$ [y]

(イ) $a^2b^3 - ab + 3ab - 2a^2b^2 + 7c^2 + 4a - 5b - 3a + 1$ [b], [a と b]

練習(基本) 2 $A = -2x^3 + 4x^2y + 5y^3$, $B = x^2y - 3xy^2 + 2y^3$, $C = 3x^3 - 2x^2y$ であるとき、次の計算をせよ。

(1) $3(A - 2B) - 2(A - 2B - C)$

(2) $3A - 2(2A - B) - (A - 3B) - 3C$

基本例題 3

次の計算をせよ。

(1) $(-xy)^2(-3x^2y)$

(2) $-a^2b(-3a^2bc^2)^3$

(3) $3abc(a + 4b - 2c)$

(4) $(-xy)^3(3x^2 - 2y - 4)$

基本例題 2

$A = x^2 + 3y^2 - 2xy$, $B = y^2 + 3xy - 2x^2$, $C = -3x^2 + xy - 4y^2$ であるとき、次の計算をせよ。

(1) $A + B$

(2) $A - B$

(3) $-3A + 2B - C$

(4) $3(2A + C) - 2(2(A + C) - (B - C))$

練習(基本) 3 次の計算をせよ。

(1) $(-ab)^2(-2a^3b)$

(2) $(-2x^4y^2z^3)(-3x^2y^2z^4)$

(3) $2a^2bc(a - 3b^2 + 2c)$

(4) $(-2x)^3(3x^2 - 2x + 4)$

基本例題 4

次の式を展開せよ。

(1) $(3x + 2)(4x^2 - 3x - 1)$

(2) $(3x^2 - 5x^2 + 1)(1 - x + 2x^2)$

練習 (基本) 4 次の式を展開せよ。

(1) $(2a+3b)(a-2b)$

(2) $(2x-3y-1)(2x-y-3)$

(3) $(2a-3b)(a^2+4b^2-3ab)$

(4) $(3x+x^2-1)(2x^2-x-6)$

基本例題 5

次の式を展開せよ。

(1) $(a+2)^2$

(2) $(3x-4y)^2$

(3) $(2a+b)(2a-b)$

(4) $(x+3)(x-5)$

(5) $(2x+3)(3x+4)$

(6) $(4x+y)(7y-3x)$

(2) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

(3) $(a+3)^3$

(3) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+3)$

(4) $(2x-y)^3$

練習 (基本) 7 次の式を展開せよ。

(1) $(a+3b-c)^2$

(2) $(x+y+7)(x+y-7)$

練習 (基本) 6 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x^2-2x+4)$

(2) $(2p-q)(4p^2+2pq+q^2)$

(3) $(x-3y+2z)(x+3y-2z)$

(4) $(x^2-3x+1)(x^2+4x+1)$

(3) $(2x+1)^3$

(4) $(3x-2y)^3$

基本例題 7

次の式を展開せよ。

(1) $(a-b+c)^2$

(2) $(x+y+z)(x-y-z)$

基本例題 8

次の式を展開せよ。

(1) $(x+y)(x^2+y^2)(x-y)$

(2) $(p+2q)^2(p-2q)^2$

練習 (基本) 5 次の式を展開せよ。

(1) $(3x+5y)^2$

(2) $(a^2+2b)^2$

(3) $(3a-2b)^2$

(4) $(2xy-3)^2$

(5) $(2x-3y)(2x+3y)$

(6) $(3x-4y)(5y+4x)$

基本例題 6

次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)(x^2-3x+9)$

(3) $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

練習(基本)8 次の式を展開せよ。

(1) $(x+3)(x-3)(x^2+9)$

(2) $(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$

(3) $(a+b)^3(a-b)^3$

(4) $(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-3x+9)$

重要例題9

次の式を計算せよ。

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

(2) $(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$

(3) $(a+2b+1)(a^2-2ab+4b^2-a-2b+1)$

練習(重要)9 次の式を展開せよ。

(1) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)$

(2) $(x+8)(x+7)(x-3)(x-4)$

(3) $(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$

(4) $(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$

2. 因数分解

基本例題10

次の式を因数分解せよ。

(1) $9a^3x^2y-45ax^3y^2+18a^2xy^3$

(2) $(x-y)^2+yz-zx$

(3) $x^2+14x+49$

(4) $9x^2-12xy+4y^2$

(5) $6a^2b-24ab^3$

(6) $x^2+7x+10$

(7) $a^2+5a-24$

練習 (基本) 10 次の式を因数分解せよ。

(1) $(a+b)x - (a+b)y$

(2) $(a-b)x^2 + (b-a)xy$

(3) $121 - 49x^2y^2$

(4) $8xyz^2 - 40xy^2z + 50xy^2$

(5) $x^2 - 8x + 12$

(6) $a^2 + 5ab - 150b^2$

(7) $x^2 - xy - 12y^2$

基本例題 11

次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 5x + 2$

(2) $6x^2 + x - 2$

(3) $6x^2 - 7xy - 24y^2$

練習 (基本) 11 次の式を因数分解せよ。

(1) $3x^2 + 10x + 3$

(2) $2x^2 - 9x + 4$

(3) $6x^2 + x - 1$

(4) $8x^2 - 2xy - 3y^2$

基本例題 12

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^3 - 27$

(2) $64a^3 + 125b^3$

(3) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

(4) $x^2 + x^2 - 4x - 4$

練習 (基本) 12 次の式を因数分解せよ。

(1) $8a^3 + 27b^3$

(2) $64x^3 - 1$

(5) $6a^2 - ab - 12b^2$

(6) $10p^2 - 19pq + 6q^2$

(3) $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$

(4) $4x^3 - 8x^2 - 9x + 18$

基本例題 13

次の式を因数分解せよ。

(1) $2(x-1)^2 - 11(x-1) + 15$

(2) $x^2 - y^2 + 4y - 4$

(3) $x^4 - 10x^2 + 9$

(4) $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8$

練習(基本) 13 次の式を因数分解せよ。

(1) $6(2x+1)^2 + 5(2x+1) - 4$

(2) $4x^2 - 9y^2 + 28x + 49$

(3) $2x^4 - 7x^2 - 4$

(4) $(x^2 - 2x)^2 - 11(x^2 - 2x) + 24$

(3) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7) - 9$

(4) $(x+y+1)^4 - (x+y)^4$

基本例題 15

次の式を因数分解せよ。

(1) $9b^2 + 8ab - 2a - 4$

(2) $x^3 - x^2y - xz^2 + yz^2$

(3) $1 + 2ab + a + 2b$

重要例題 14

次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 7) + 1$

(2) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

(3) $(x+y)^4 - (x-y)^4$

練習(重要) 14 次の式を因数分解せよ。

(1) $(x^2 - 2x - 16)(x^2 - 2x - 14) + 1$

(2) $(x+1)(x-5)(x^2 - 4x + 6) + 18$

練習(基本) 15 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3b + 16 - 4ab - 4a^2$

(2) $x^3y + x^2 - xyz^2 - z^2$

(3) $6x^3 - yz + 2xz - 3xy$

(4) $3x^2 - 2z^2 + 4yz + 2xy + 5xz$

基本例題 16

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - xy - 2y^2 - x - 7y - 6$

(2) $3x^2 + 7xy + 2y^2 - 5x - 5y + 2$

練習(基本) 16 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 10y + 8$

(2) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 7x + 7y - 4$

(3) $6x^2 + 5xy + y^2 + 2x - y - 20$

基本例題 17

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc$

(2) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

練習(基本) 17 次の式を因数分解せよ。

(1) $abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1$

(2) $a^2b + ab^2 + a + b - ab - 1$

重要例題 18

次の式を因数分解せよ。

(1) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 3abc$

(2) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

練習(重要) 18 次の式を因数分解せよ。

(1) $ab(a+b) + ba(b+c) + ca(c+a) + 3abc$

(2) $a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$

(3) $x^4 - 9x^2y^2 + 16y^4$

(4) $4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$

重要例題 19

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + 4x^2 + 16$

(2) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

(3) $4x^4 + 1$

練習(重要) 19 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + 3x^2 + 4$

(2) $x^4 - 11x^2y^2 + y^4$

重要例題 20

(1) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ であることを用いて、 $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ を因数分解せよ。

(2) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$ を因数分解せよ。

練習(重要) 20 次の式を因数分解せよ。

(1) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$

(2) $a^3 + 6ab - 8b^3 + 1$

3. 実数

基本例題 21

(1) 次の分数を小数に直し、循環小数の表し方で書け。

(ア) $\frac{7}{9}$ (イ) $\frac{31}{27}$

(2) 次の循環小数を分数で表せ。

(ア) $0.\dot{6}$ (イ) $1.1\dot{8}$

(ウ) $0.01\dot{2}\dot{3}$

練習(基本) 21 (1) 次の分数を小数に直し、循環小数の表し方で書け。

(ア) $\frac{22}{9}$ (イ) $\frac{1}{12}$

(ウ) $\frac{8}{7}$

(2) 次の循環小数を分数で表せ。

(ア) $0.\dot{7}$ (イ) $0.2\dot{4}\dot{6}$

(ウ) $0.0\dot{7}2\dot{9}$

基本例題 22

(1) 次の値を求めよ。

(ア) $|8|$ (イ) $\left| -\frac{2}{3} \right|$

(ウ) $|3-\pi|$

(2) 数直線上において、次の2点間の距離を求めよ。

(ア) P(2), Q(5) (イ) A(2), B(-3) (ウ) C(-6), D(-2)

練習(基本) 22 (1) 次の値を求めよ。

(ア) $|-\theta|$ (イ) $|\sqrt{2}-1|$

(ウ) $|2\sqrt{3}-4|$

(2) 数直線上において、次の2点間の距離を求めよ。

(ア) P(-2), Q(5) (イ) A(8), B(3) (ウ) C(-4), D(-1)

(3) $x=2, 3$ のとき、 $P=|x-1|-2|3-x|$ の値をそれぞれ求めよ。

基本例題 23

(1) (ア), (イ) の値を求めよ。(ウ) は $\sqrt{\quad}$ がつかない形にせよ。

(ア) $\sqrt{(-5)^2}$ (イ) $\sqrt{(-8)(-2)}$

(3) $x=2, -\frac{1}{2}$ のとき、 $P=|2x+1|-|x|$ の値をそれぞれ求めよ。

(イ) $\sqrt{a^2b^2}$ ($a > 0, b < 0$)

(2) 次の式を計算せよ。

(ア) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}$

(イ) $(\sqrt{11} - \sqrt{3})(\sqrt{11} + \sqrt{3})$

(イ) $(2\sqrt{2} - \sqrt{27})^2$

(エ) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})$

練習 (基本) 23 (1) 次の値を求めよ。

(ア) $\sqrt{(-3)^2}$ (イ) $\sqrt{(-15)(-45)}$

(イ) $\sqrt{15}\sqrt{35}\sqrt{42}$

(2) 次の式を計算せよ。

(ア) $\sqrt{18} - 2\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{32}$

(イ) $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$

(イ) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{3})(3\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$

(エ) $(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2})$

基本例題 24

次の式を、分母を有理化して簡単にせよ。

(1) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{6}}$

(2) $\frac{6}{3 - \sqrt{7}}$

(3) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

(3) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3} + 1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

(4) $\frac{1}{1 + \sqrt{6} + \sqrt{7}} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$

(4) $\frac{4}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

(5) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

練習 (基本) 24 次の式を、分母を有理化して簡単にせよ。

(1) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

1

(2) $\frac{6}{3 - \sqrt{7}}$

(3) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

(4) $\frac{1}{1 + \sqrt{6} + \sqrt{7}} + \frac{1}{5 + 2\sqrt{6}}$

(5) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

基本例題 29

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

(2) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

(3) $x^4 + \frac{1}{x^4}$

練習 (基本) 29 $2x + \frac{1}{2x} = \sqrt{7}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $4x^2 + \frac{1}{4x^2}$

(2) $8x^3 + \frac{1}{8x^3}$

(3) $64x^6 + \frac{1}{64x^6}$

重要例題 31

$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $a^2 - a - 1$

(2) $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$

練習 (重要) 31 $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ のとき、次の式の値を求めよ。

(1) $2a^2 - 2a - 1$

(2) a^8

重要例題 30

$x + y + z = xy + yz + zx = 2\sqrt{2} + 1$, $xyz = 1$ を満たす実数 x, y, z に対して、次の式の値を求めよ。

(1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

(2) $x^2 + y^2 + z^2$

(3) $x^3 + y^3 + z^3$

練習 (重要) 30 $x + y + z = 2\sqrt{3} + 1$, $xy + yz + zx = 2\sqrt{3} - 1$, $xyz = -1$ を満たす実数 x, y, z に対して、次の式の値を求めよ。

(1) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$

(2) $x^2 + y^2 + z^2$

(3) $x^3 + y^3 + z^3$

4. 1 次不等式

基本例題 32

$3 < x < 5$, $-1 < y < 4$ であるとき、次の式のとおりる値の範囲を求めよ。

(1) $x - 1$

(2) $-3y$

(3) $x + y$

(4) $x - y$

(5) $2x - 3y$

練習 (基本) 32 $-1 < x < 2$, $1 < y < 3$ であるとき、次の式のとおりる値の範囲を求めよ。

(1) $x + 3$

(2) $-2y$

(3) $-\frac{x}{5}$

(4) $5x - 3y$

基本例題 33

x, y を正の数とする。 $x, 3x+2y$ を小数第 1 位で四捨五入すると、それぞれ 6, 21 になるという。

- (1) x の値の範囲を求めよ。

- (2) y の値の範囲を求めよ。

基本例題 34

次の 1 次不等式を解け。

- (1) $6x-21 > 3x$

- (2) $5x+16 \leq 9x-4$

- (3) $3(x-1) \geq 2(5x+4)$

練習 (基本) 33 x, y を正の数とする。 $x, 5x-3y$ を小数第 1 位で四捨五入すると、それぞれ 7, 13 になるという。

- (1) x の値の範囲を求めよ。

- (4) $\frac{5x+1}{4} - \frac{2-3x}{3} < \frac{1}{6}x+1$

- (2) y の値の範囲を求めよ。

練習 (基本) 34 次の 1 次不等式を解け。

- (1) $5x-7 > 3(x+1)$

- (2) $4(3-2x) \leq 5(x+2)$

- (3) $\frac{3x+2}{5} < \frac{2x-1}{3}$

- (4) $0.2x+1 \leq -0.3x-2.5$

- (5) $x+\frac{1}{3}\left\{x-\frac{1}{4}(x+1)\right\} > 2x-\frac{1}{2}$

基本例題 35

- (1) 連立不等式
$$\begin{cases} 5x+1 \leq 8(x+2) \\ 2x-3 < 1-(x-5) \end{cases}$$
 を解け。

- (2) 連立不等式
$$\begin{cases} x+7 < 1-2x \\ 6x+2 \geq 2 \end{cases}$$
 を解け。

- (3) 不等式 $-2x+1 < 3x+4 < 2(3x-4)$ を解け。

練習 (基本) 35 (1) 連立不等式 $\begin{cases} 2(1-x) > -6-x \\ 2x-3 > -9 \end{cases}$ を解け。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} 3(x-4) \leq x-3 \\ 6x-2(x+1) < 10 \end{cases}$ を解け。

(3) 不等式 $x+9 \leq 3-5x \leq 2(x-2)$ を解け。

基本例題 36

(1) 不等式 $5x-7 < 2x+5$ を満たす自然数 x の値をすべて求めよ。

(2) 不等式 $x < \frac{3a-2}{4}$ を満たす x の最大の整数値が 5 であるとき、定数 a の値の範囲を求めよ。

練習 (基本) 36 (1) 不等式 $4(x-2)+5(6-x) > 7$ を成り立たせる x の値のうち、最も大きい整数を求めよ。

基本例題 37

k を $k > 2$ を満たす定数とする。このとき、 x についての不等式 $5-x \leq 4x < 2x+k$ の解は \square である。また、不等式 $5-x \leq 4x < 2x+k$ を満たす整数 x がちょうど 5 つ存在するような定数 k の値の範囲は \square である。

(2) 不等式 $3x+1 > 2a$ を満たす x の最小の整数値が 4 であるとき、整数 a の値をすべて求めよ。

練習 (基本) 37 x に関する連立不等式 $\begin{cases} 6x-4 > 3x+5 \\ 2x-1 \leq x+a \end{cases}$ を満たす整数がちょうど 5 個 あるとする。このとき、定数 a のとりうる値の範囲は $\square \leq a < \square$ である。

重要例題 38練習(重要) 38 (1) 不等式 $ax > x + a^2 + a - 2$ を解け。ただし、 a は定数とする。(1) 不等式 $ax < 4 - 2x + a^2$ を解け。ただし、 a は定数とする。(2) 不等式 $ax < 4 - 2x < 2x$ の解が $1 < x < 4$ であるとき、定数 a の値を求めよ。(2) 不等式 $2ax \leq 4x + 1 \leq 5$ の解が $-6 \leq x \leq 1$ であるとき、定数 a の値を求めよ。**基本例題 39**

何人かの子ども選にリンゴを配る。1人4個ずつにすると19個余るが、1人7個ずつにすると、最後の子どもは4個より少なくなる。このときの子どもの人数とリンゴの総数を求めよ。

基本例題 40

次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x-1|=2$

(2) $|2-3x|=4$

練習(基本) 39 兄弟合わせて52本の鉛筆を持っている。いま、兄が弟に自分が持っている鉛筆のうち $\frac{1}{3}$ をあげてもまだ兄の方が多く、更に3本あげると弟の方が多くなる。兄が初めに持っていた鉛筆の本数を求めよ。

(3) $|x-2| < 3$

(4) $|x-2| > 3$

練習 (基本) 40 次の方程式・不等式を解け。

(1) $|x+5|=3$

(2) $|1-3x|=5$

(3) $|x+2|<5$

(4) $|2x-1|\geq 3$

基本例題 41

次の方程式を解け。

(1) $|x-2|=3x$

(2) $|x-1|+|x-2|=x$

練習 (基本) 41 次の方程式を解け。

(1) $2|x-1|=3x$

(2) $2|x+1|-|x-3|=2x$

基本例題 42

次の不等式を解け。

(1) $|x-4|<3x$

(2) $|x-1|+2|x-3|\leq 11$

練習 (基本) 42 次の不等式を解け。

(1) $3|x+1| < x+5$

(2) $|x+2| - |x-1| > x$

基本例題 43

次の方程式・不等式を解け。

(1) $||x-4| - 3| = 2$

(2) $|x-7| + |x-8| < 3$

基本例題 43

次の方程式・不等式を解け。

(1) $||x-4| - 3| = 2$

(2) $|x+2| - |x-1| > x$

(2) $|x-7| + |x-8| < 3$

練習 (基本) 43 次の方程式・不等式を解け。

(1) $||x-1| - 2| - 3 = 0$

5. 集合

基本例題 44

(1) 42の正の約数全体の集合を A とする。次の \square の中に、 \in または \notin のいずれかが適するものを書き入れよ。

(ア) $7 \square A$

(イ) $9 \square A$

(ウ) $-2 \square A$

(2) 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(ア) $A = \{x \mid -2 \leq x < 4, x \text{ は整数}\}$

(2) $|x-5| \leq \frac{2}{3}|x| + 1$

(イ) $B = \{x \mid x \text{ は } 24 \text{ の正の約数}\}$

(3) 3つの集合 $A = \{3, 6, 9\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}$,

$C = \{x \mid 1 \leq x \leq 10, x \text{ は整数で } 3 \text{ の倍数}\}$ について、次の \square の中に、 \subset , \supset , $=$ のうち、

最も適するものを書き入れよ。

(ア) $A \square B$

(イ) $B \square C$

(ウ) $A \square C$

練習 (基本) 44 (1) 1桁の自然数のうち、4の倍数であるもの全体の集合を A とする。

次の \square の中に、 \in または \notin のいずれか適するものを書き入れよ。

(ア) $6 \square A$

(イ) $8 \square A$

(ウ) $12 \square A$

(2) 次の集合を、要素を書き並べて表せ。

(ア) $A = \{x \mid -3 < x < 2, x \text{ は整数}\}$

(イ) $B = \{x \mid x \text{ は } 32 \text{ の正の約数}\}$

(3) 3つの集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 4 \text{ 未満の自然数}\}$, $C = \{x \mid x \text{ は } 6 \text{ の正の約数}\}$ について、次の \square の中に、 \subset , \supset , $=$ のうち、最も適するものを書き入れよ。

(ア) $A \square B$

(イ) $B \square C$

(ウ) $A \square C$

基本 例題 45

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とする。

集合 U の部分集合 A, B を $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 6, 9\}$ とするとき、次の集合を求めよ。

(1) \overline{A}

(2) $\overline{A \cap B}$

(3) $\overline{A \cup B}$

(4) $\overline{A \cap B}$

(5) $\overline{A \cup B}$

練習 (基本) 45 全体集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ の部分集合 A, B について

$$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 5, 8\}, A \cap B = \{3\}, \overline{A \cap B} = \{4, 7, 10\}$$

がわかっている。このとき、 $A, B, A \cap B$ を求めよ。

基本 例題 46

実数全体を全体集合とし、その部分集合 A, B, C を $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid |x| < 4\}$,

$$C = \{x \mid |k-7| \leq x < k+3\} (k \text{ は定数})$$
 とする。

(1) 次の集合を求めよ。

(ア) \overline{B}

(イ) $A \cup \overline{B}$

(ウ) $A \cap \overline{B}$

(2) $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x \mid k-6 \leq x \leq k\}$ (k は定数) とするとき、 $A \subset B$ となる k の値の範囲を求めよ。

重要 例題 47

1以上1000以下の整数全体の集合 U を全体集合として考える。

$$A = \{x \mid x \text{ は } 3 \text{ の倍数}, x \in U\}, B = \{x \mid x \text{ は } 4 \text{ の倍数}, x \in U\},$$

$$C = \{x \mid x \text{ は } 6 \text{ の倍数}, x \in U\}$$
 とするとき、 $\overline{C} \subset \overline{A \cup B}$ であることを示せ。

練習 (基本) 46 実数全体を全体集合とし、その部分集合 A, B, C について、次の問いに答えよ。

(1) $A = \{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$, $B = \{x \mid 2x - 8 > 0\}$, $C = \{x \mid -2 < x < 5\}$ とするとき、次の集合を求めよ。

(ア) \overline{B}

(イ) $A \cap \overline{B}$

(ウ) $\overline{B} \cup C$

練習 (重要) 47 1から1000までの整数全体の集合を全体集合 U とし、その部分集合 A, B, C を

$$A = \{n \mid n \text{ は奇数}, n \in U\}, B = \{n \mid n \text{ は } 3 \text{ の倍数でない}, n \in U\},$$

$$C = \{n \mid n \text{ は } 18 \text{ の倍数でない}, n \in U\}$$

とする。このとき、 $A \cup B \subset C$ であることを示せ。

基本例題 48

実数 a に対して、2 つの集合を

$$A = \{a-1, 4, a^2-5a+6\}, B = \{1, a^2-4, a^2-7a+12, 4\}$$

とする。 $A \cap B = \{0, 4\}$ であるとき、 a の値を求めよ。

基本例題 49

$A = \{n \mid n \text{ は } 16 \text{ の正の約数}\}$, $B = \{n \mid n \text{ は } 20 \text{ の正の約数}\}$, $C = \{n \mid n \text{ は } 8 \text{ 以下の正の偶数}\}$ とする。このとき、次の集合を求めよ。

$$(1) A \cap B \cap C \qquad (2) A \cup B \cup C$$

$$(3) (A \cap B) \cup C$$

$$(4) (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

練習 (基本) 48 $U = \{x \mid x \text{ は実数}\}$ を全体集合とする。 U の部分集合 $A = [2, 4, a^2+1]$, $B = \{4, a+7, a^2-4a+5\}$ について、 $A \cap \overline{B} = [2, 5]$ となるとき、定数 a の値を求めよ。

練習 (基本) 49 30 以下の自然数全体を全体集合 U とし、 U の要素のうち、偶数全体の集合を A , 3 の倍数全体の集合を B , 5 の倍数全体の集合を C とする。次の集合を求めよ。

$$(1) A \cap B \cap C \qquad (2) A \cap (B \cup C)$$

$$(3) (\overline{A \cup B}) \cap C$$

重要例題 50

Z を整数全体の集合とするとき、次のことを証明せよ。

$$(1) A = \{4n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ であるとき } A \subset B \text{ かつ } A \neq B$$

練習 (重要) 50 次のことを証明せよ。ただし、 Z は整数全体の集合とする。

$$(1) A = \{3n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{6m+5 \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ ならば } A \supset B$$

$$(2) A = \{5n+2 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{5m-3 \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ であるとき } A = B$$

$$(2) A = \{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}\}, B = \{2m+1 \mid m \in \mathbb{Z}\} \text{ ならば } A = B$$

6. 命題と条件

基本例題 51

x, y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

- (1) $x=0$ ならば $xy=0$

(2) $x^2=16$ ならば $x=4$

(3) 「 $x+y>0$ かつ $xy>0$ 」ならば「 $x>0$ かつ $y>0$ 」

(4) $x+y=0$ ならば $x=y=0$

(5) $x^2+y^2=0$ ならば $x=y=0$

基本例題 52

x は実数とする。集合を利用して、次の命題の真偽を調べよ。

- (1) $0 \leq x \leq 1$ ならば $|x| < 1$

(2) $|x-1| < 2$ ならば $|x| < 3$

練習 (基本) 51 次の命題の真偽を調べよ。ただし、 m, n は自然数、 x, y は実数とする。

- (1) n が 8 の倍数ならば、 n は 4 の倍数である。

(2) $m+n$ が偶数ならば、 m, n はともに偶数である。

(3) xy が有理数ならば、 x, y はともに有理数である。

(4) x, y がともに有理数ならば、 xy は有理数である。

(2) $|x-1| > 1$ ならば $2|x-2| \geq 1$

基本例題 53

- (1) 次の (ア) ~ (エ) が、命題「 $x < 1 \Rightarrow |x| < 2$ 」が偽であることを示すための反例であるかどうか、それぞれ答えよ。

(ア) $x = -3$ (イ) $x = -1$

(ウ) $x = 1$

(エ) $x = 3$

- (2) a を整数とする。命題「 $a < x < a+4 \Rightarrow x \leq 5-2a$ 」が偽で、 $x=3$ がこの命題の反例であるとき、 a の値を求めよ。

練習 (基本) 52 x は実数とする。集合を利用して、次の命題の真偽を調べよ。

- (1) $|x| < 2$ ならば $-3 < x < 3$

練習(基本)53 (1) 次の(ア)～(エ)が、命題「 $|x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$ 」が偽であることを示すための反例であるかどうか、それぞれ答えよ。

(ア) $x = -4$

(イ) $x = -2$

(ウ) $x = 2$

(エ) $x = 4$

(2) a を整数とする。命題「 $a < x < a + 8 \Rightarrow x \leq 2 + 3a$ 」が偽で、 $x = 4$ がこの命題の反例であるような a のうち、最大のものを求めよ。

基本例題 54

次の に最も適する語句を(ア)～(エ)から選べ。ただし、 x, y は実数とする。

- (ア) 必要十分条件である (イ) 必要条件であるが十分条件ではない
 (ウ) 十分条件であるが必要条件ではない (エ) 必要条件でも十分条件でもない
 (1) $x < 1$ は $x \leq 1$ であるための 。

(2) $x < y$ は $x^4 < y^4$ であるための 。

(3) $xy + 1 = x + y$ は x, y のうち少なくとも1つは1であるための 。

(4) $\triangle ABC$ において、 $\angle A < 90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が鋭角三角形であるための 。

練習(基本)53 (1) 次の(ア)～(エ)が、命題「 $|x| \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$ 」が偽であることを示すための反例であるかどうか、それぞれ答えよ。

(ア) $x = -4$

(イ) $x = -2$

(ウ) $x = 2$

(エ) $x = 4$

(2) a を整数とする。命題「 $a < x < a + 8 \Rightarrow x \leq 2 + 3a$ 」が偽で、 $x = 4$ がこの命題の反例であるような a のうち、最大のものを求めよ。

練習(基本)54 次の に最も適する語句を(ア)～(エ)から選べ。ただし、 a, x, y は実数とする。

- (ア) 必要十分条件である (イ) 必要条件であるが十分条件ではない
 (ウ) 十分条件であるが必要条件ではない (エ) 必要条件でも十分条件でもない
 (1) $xy > 0$ は $x > 0$ であるための 。

(2) $a \geq 0$ は $\sqrt{a^2} = a$ であるための 。

(3) $\triangle ABC$ において、 $\angle A = 90^\circ$ は、 $\triangle ABC$ が直角三角形であるための 。

基本例題 55

文字はすべて実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x > 0$

(2) $x > 0$ かつ $y \leq 0$

(3) $x \geq 2$ または $x < -3$

(4) $a = b = c = 0$

練習(基本)55 x, y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) $x \leq 3$

(2) $x \leq 3$ かつ $y > 2$

(4) A, B を2つの集合とする。 a が $A \cup B$ の要素であることは、 a が A の要素であるための 。

(4) $-2 < x \leq 4$

基本例題 56

次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

- (1) すべての実数 x について $x^2 > 0$

練習 (基本) 56 次の命題の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

- (1) 少なくとも1つの自然数 n について $n^2 - 5n - 6 = 0$

- (2) ある素数 x について、 x は偶数である。

- (2) すべての実数 x, y について $9x^2 - 12xy + 4y^2 > 0$

- (3) 任意の実数 x, y に対して $x^2 - 4xy + 4y^2 > 0$

- (3) ある自然数 m, n について $2m + 3n = 6$

重要例題 57

次の命題の否定を述べよ。

- (1) x が実数のとき、 $x^2 = 1$ ならば $x = 1$ である。

- (2) x が実数のとき、 $|x| < 1$ ならば $-3 < x < 1$ である。

- (3) x, y が実数のとき、 $x^2 + y^2 = 0$ ならば $x = y = 0$ である。

練習 (重要) 57 次の命題の否定を述べよ。

- (1) x が実数のとき、 $x^3 = 8$ ならば $x = 2$ である。

- (2) x, y が実数のとき、 $x^2 + y^2 < 1$ ならば $|x| < 1$ かつ $|y| < 1$ である。

7. 命題と証明**基本例題 58**

次の命題の逆・対偶・裏を述べ、その真偽をいえ。 x, a, b は実数とする。

- (1) 4 の倍数は2の倍数である。

- (2) $x = 3$ ならば $x^2 = 9$

- (3) $a + b > 0$ ならば「 $a > 0$ かつ $b > 0$ 」

練習 (基本) 58 x, y は実数とする。次の命題の逆・対偶・裏を述べ、その真偽をいえ。

- (1) $x + y = 5 \implies x = 2$ かつ $y = 3$

(2) xy が無理数ならば, x, y の少なくとも一方は無理数である。

基本例題 59

n は整数とする。 n^2 が 3 の倍数ならば, n は 3 の倍数であることを証明せよ。

基本例題 60

対偶を考えることにより, 次の命題を証明せよ。

整数 a, b について, 積 ab が 3 の倍数ならば, a または b は 3 の倍数である。

練習 (基本) 59 対偶を考えることにより, 次の命題を証明せよ。

整数 m, n について, $m^2 + n^2$ が奇数ならば, 積 mn は偶数である。

練習 (基本) 60 対偶を考えることにより, 次の命題を証明せよ。ただし, a, b, c は整数とする。

(1) $a^2 + b^2 + c^2$ が偶数ならば, a, b, c のうち少なくとも 1 つは偶数である。

基本例題 61

$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いて, $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ。

(2) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$ が奇数ならば, a, b, c のうち奇数の個数は 1 個または 2 個である。

練習 (基本) 61 $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いて, $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$ が無理数であることを証明せよ。

基本 例題 62

$\sqrt{7}$ は無理数であることを証明せよ。ただし、 n を自然数とすると、 n^2 が 7 の倍数ならば、 n は 7 の倍数であることを用いてよいものとする。

基本 例題 63

(1) a, b が有理数のとき、 $a + b\sqrt{3} = 0$ ならば $a = b = 0$ であることを証明せよ。ただし、 $\sqrt{3}$ は無理数である。

練習 (基本) 62 命題「整数 n が 5 の倍数でなければ、 n^2 は 5 の倍数ではない」が真であることを証明せよ。また、この命題を用いて $\sqrt{5}$ は有理数でないことを背理法により証明せよ。

(2) 等式 $(2 + 3\sqrt{3})x + (1 - 5\sqrt{3})y = 13$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

練習 (基本) 63 (1) $x + 4\sqrt{2}y - 6y - 12\sqrt{2} + 16 = 0$ を満たす有理数 x, y の値を求めよ。

自己評価表

A : よく理解できた B : 少し理解できた C : あまり理解できなかった

問題番号	自己評価
例題 1	A B C
1	A B C
例題 2	A B C
2	A B C
例題 3	A B C
3	A B C
例題 4	A B C
4	A B C
例題 5	A B C
5	A B C
例題 6	A B C
6	A B C
例題 7	A B C
7	A B C
例題 8	A B C
8	A B C
例題 9	A B C
9	A B C
例題 10	A B C
10	A B C
例題 11	A B C
11	A B C
例題 12	A B C
12	A B C
例題 13	A B C
13	A B C
例題 14	A B C
14	A B C
例題 15	A B C
15	A B C
例題 16	A B C
16	A B C

問題番号	自己評価
例題 17	A B C
17	A B C
例題 18	A B C
18	A B C
例題 19	A B C
19	A B C
例題 20	A B C
20	A B C
例題 21	A B C
21	A B C
例題 22	A B C
22	A B C
例題 23	A B C
23	A B C
例題 24	A B C
24	A B C
例題 25	A B C
25	A B C
例題 26	A B C
26	A B C
例題 27	A B C
27	A B C
例題 28	A B C
28	A B C
例題 29	A B C
29	A B C
例題 30	A B C
30	A B C
例題 31	A B C
31	A B C
例題 32	A B C
32	A B C

問題番号	自己評価
例題 33	A B C
33	A B C
例題 34	A B C
34	A B C
例題 35	A B C
35	A B C
例題 36	A B C
36	A B C
例題 37	A B C
37	A B C
例題 38	A B C
38	A B C
例題 39	A B C
39	A B C
例題 40	A B C
40	A B C
例題 41	A B C
41	A B C
例題 42	A B C
42	A B C
例題 43	A B C
43	A B C
例題 44	A B C
44	A B C
例題 45	A B C
45	A B C
例題 46	A B C
46	A B C
例題 47	A B C
47	A B C
例題 48	A B C
48	A B C

問題番号	自己評価
例題 49	A B C
49	A B C
例題 50	A B C
50	A B C
例題 51	A B C
51	A B C
例題 52	A B C
52	A B C
例題 53	A B C
53	A B C
例題 54	A B C
54	A B C
例題 55	A B C
55	A B C
例題 56	A B C
56	A B C
例題 57	A B C
57	A B C
例題 58	A B C
58	A B C
例題 59	A B C
59	A B C
例題 60	A B C
60	A B C
例題 61	A B C
61	A B C
例題 62	A B C
62	A B C
例題 63	A B C
63	A B C

(2) a, b を有理数の定数とする。 $-1 + \sqrt{2}$ が方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解の 1 つであるとき、 a, b の値を求めよ。