

整式の加法・減法・乗法

整式:

いくつかの文字や数の積として表わされる式を単項式という。また、いくつかの単項式の和として表される式を多項式といい、単項式と多項式をあわせて整式という。

多項式の係数・次数:

多項式において、各単項式をその項といい、同類項を整理したとき、各項の次数のうち、最高次の項の次数を多項式の次数という。また、 x についての整式において、 x を含まない項を定数項という。

計算の基本法則:

交換法則 $A + B = B + A$, $AB = BA$

結合法則 $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(AB)C = A(BC)$

分配法則 $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$

整式の整理:

① 同類項の簡約 分配法則の逆によって、同類項は1つの項にまとめる。

② 1つの文字について、降べき（または、昇べき）の順に整理する。

(例) 降べきの順 $4x^3 - 3x^2 + 7x - 6$

昇べきの順 $-6 + 7x - 3x^2 + 4x^3$

累乗, 指数法則: m, n は自然数

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ② $(a^m)^n = a^{mn}$ ③ $(ab)^n = a^n b^n$

(確認)

① $a^3 \cdot a^2 = (a \times a \times a) \times (a \times a) = a^5$

② $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6$

③ $(ab)^3 = ab \times ab \times ab = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3$

乗法公式:

$$\textcircled{1} \begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (x+p)(x+q) = x^2 + (p+q)x + pq \\ (ax+p)(bx+q) = abx^2 + (aq+bp)x + pq \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

(証明) $(a+b)^3 =$

$$\textcircled{5} (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

(証明) $a+b=A$ とおくと,

$$(a+b+c)^2 =$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} (a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \end{cases}$$

練習1. 次の整式は, [] 内の文字について何次式か. また, 各項の係数をいえ.

(1) $2a^2b + 4bc - c^3 - a^2c$ [c]

(2) $ax^2 + 2hxy + by^2 + c$ [x, y]

練習2. 次の式を, [] 内の文字について, 降べきの順に整理せよ.

(1) $x^2 + 5 - 3x^3 - 2x$ [x]

(2) $2x^2 - 3xy + y^2 + 7x - 4y + 5$ [y]

$P = 2a^3 - 6a^2b + 3b^3, Q = a^3 + b^3 - 4ab^2 + 2a^2b$ のとき,

(1) $P + Q$ (2) $P - Q$ (3) $2Q - 3P$ を求めよ.

練習3. $A = x^2 + 3y^2 - 2xy, B = y^2 + 3xy - 2x^2, C = -3x^2 + xy - 4y^2$ のとき, 次を計算せよ

(1) $A + B$ (2) $A - B$ (3) $-3A + 2B - C$

次の単項式の積を, 1つの単項式で表せ.

(1) $(-2a^2b)^3$ (2) $(-2ax^3y)^2(-3ab^2xy^3)$

練習4. 次の式を簡単にせよ.

(1) $3a^2b^3 \times 4a^2b$ (2) $(-ab)^2(-2a^3b)^3$ (3) $(-3x^2y^2)^2(-x^2y)^3(-2xy^2)^2$

次の積を展開せよ.

(1) $(3a - 2b)(a^2 - 4ab - b^2)$ (2) $(x^3 + 5 - 2x)(x^2 + 3 - x)$

練習5. 次の積を展開せよ.

(1) $(2x^2 - 3xy - y^2)(-2xy)$ (2) $3x^2\{2x^2 - 1 - x(x - 1)\}$

練習6. 次の積を展開せよ.

(1) $(x^2 + 3x - 4)(2x - 3)$ (2) $(2x^2 + 1 - x)(3x^3 - 5x^2 + 1)$

(3) $(2a - 3b)(a^2 + 4b^2 - 3ab)$ (4) $(2x - 3y - 1)(2y - x - 3)$

次の積を展開せよ.

(1) $(-2a + 5b)^2$ (2) $(3x - 2y)(2y + 3x)$
(3) $(a - 2b)(a + 3b)$ (4) $(2p + 3)(4p - 1)$
(5) $(2x - 3y)^3$ (6) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

第1講座 整式の加法・減法・乗法

練習7. 次の積を展開せよ.

(1) $(x+2)^2$

(2) $(2a-3)^2$

(3) $(3x-4y)^2$

(4) $(2a+b)(2a-b)$

(5) $(2x-3)(2x+3)$

(6) $(5b-2a)(2a+5b)$

(7) $(x+3)(x-5)$

(8) $(a-2b)(a-3b)$

(9) $(2x+3)(3x+4)$

(10) $(6s-5t)(3s-2t)$

(11) $(2p-3q)(3p+4q)$

(12) $(2x+y)(5x-3y)$

(13) $(a+3)^3$

(14) $(2x-y)^3$

(15) $(-4x+3)^3$

(16) $(x+3)(x^2-3x+9)$

(17) $(3a-2b)(9a^2+6ab+4b^2)$

第1講座 整式の加法・減法・乗法

例題5 (乗法公式の利用(2))

次の積を展開せよ.

(1) $(x^2-3xy+2y^2)(x^2-3xy-2y^2)$

(2) $(2a-3b-c)^2$

(3) $(a+b)(a^2+b^2)(a-b)$

(4) $(a+b)^2(a-b)^2$

第1講座 整式の加法・減法・乗法

練習8. 次の積を展開せよ.

(1) $(2x^2 - 3x + 4)(2x^2 + 3x + 4)$

(2) $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$

(3) $(x + 2y - 3z)^2$

(4) $(x^2 - 2x - 3)^2$

第1講座 整式の加法・減法・乗法

練習9. 次の積を展開せよ.

(1) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

(2) $(a + b)(a - b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

(3) $(a + b)^3(a - b)^3$

(4) $(a - 1)^2(a + 1)^2(a^2 + 1)^2$

次の積を展開せよ.

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ (2) $(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

練習10. 次の積を展開せよ.

(1) $(x+2)(x+3)(x-1)(x-6)$

(2) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)$

練習11. 次の積を展開せよ.

(1) $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ (2) $(1+a)(1-a+a^2)(1-a^3+a^6)$

第1講座 整式の加法・減法・乗法

★ 例題7 (複雑な積の展開)

次の積を展開せよ.

(1) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$

(2) $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

第1講座 整式の加法・減法・乗法

★ 練習12. 次の積を展開せよ.

(1) $(x-2y-z)(x^2+4y^2+z^2-2yz+zx+2xy)$ (2) $(x+y+1)(x^2+y^2-xy-x-y+1)$

★ 練習13. 次の積を展開せよ.

(1) $(x-a)(x-b)(x-c)$ (2) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

(3) $(x+y+z)^3$

★例題8 (積の展開と加減)

次の式を簡単にせよ.

$$(x+y+z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - (x+y-z)^3$$

★練習14. 次の式を簡単にせよ.

$$(1) (a+b+c)^2 - (b+c-a)^2 - (c+a-b)^2 - (a+b-c)^2$$

$$(2) (b-c)(x-b)(x-c) + (c-a)(x-c)(x-a) + (a-b)(x-a)(x-b)$$

$$(3) (a+b+c)(c+a-b)(a+b-c) + (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a) \\ + (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b) - (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

第2講座
因数分解

因数分解の基本:

整式 P が A, B, C, \dots の積として表されるとき, A, B, C, \dots を P の因数という. 整式を因数分解するとき, 整式の各項に共通な因数 (共通因数) があればくりだす.

$$ma + mb - mc = m(a + b - c)$$

因数分解の公式:

- ① $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{cases}$
- ② $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- ③ $\begin{cases} x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q) \\ abx^2 + (aq + bp)x + pq = (ax + p)(bx + q) \end{cases}$
- ④ $\begin{cases} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 \\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 \end{cases}$
- ⑤ $\begin{cases} a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \end{cases}$
- ⑥ $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2$
- ⑦ $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

2元2次式の因数分解:

- 1つの文字について整理してたすきがけ
- (2次の係数が1ならその文字について整理する)

複2次式の因数分解:

$ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) の形の整式を, x についての複2次式という. 複2次式の因数分解には次の2つのテクニックがある.

- ① $x^2 = X$ とおく
- ② $A^2 - B^2$ の形に変形

因数分解のまとめ:

1. 共通因数をくりだす
2. 最低次の文字について整理
3. 公式利用に持ち込む (おき換えをする, 加えて引いて平方の差をつくる)

たすきがけ:

例. $15x^2 + 28x + 12$ を因数分解せよ.

x の2次式なので, 1次式 $(ax + b)(cx + d)$ の積の形に因数分解できるはずである. つまり,

$$(ac + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

の展開の逆をすればよい.

↓

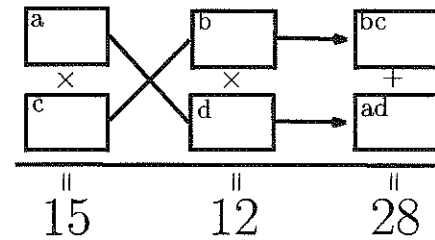
$15x^2 + 28x + 12 = (ax + b)(cx + d)$ と因数分解したい.

↓

ここで, a, b, c, d に当てはまる数は, x^2 の係数, x の係数, 定数項を比較して

$$ac = 15, bd = 12, ad + bc = 28$$

を満たす数である. これらの条件を満たす a, b, c, d を次のような表を書いて求める.



- ① a, c と b, d に条件を満たす数字を入れる.
- ② ad, bc を計算してかく.
- ③ $ad + bc = 28$ となれば OK.

ならなければ, b, d や a, c に入れる数字を入れかえたり, 組み合わせを変えたりする.

類題. 次の式を因数分解せよ.

- (1) $2x^2 + 5x + 3$
- (2) $3x^2 - 14x + 8$
- (3) $6x^2 + 11x + 3$
- (4) $2x^2 + 7xy + 6y^2$

2次方程式の解と因数分解:

x の2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が解 α, β をもつとき,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は, $b^2 - 4ac \geq 0$ のとき $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ここで, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ とおくと

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{cases}$$

よって, $ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \{ x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \} = a(x - \alpha)(x - \beta)$ ■

対称式と交代式:

a と b の多項式において, a と b のどの2つを入れ替えても

もとの式と同じになる式を対称式, 符号だけが変わる式を交代式

という. a と b の対称式において, $a + b, ab$ を基本対称式といい, 対称式は基本対称式で表される.

次の式を因数分解せよ.

- (1) $12x^2y - 27yz^2$ (2) $x^3 + 8$
 (3) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (4) $x^2 - 7x - 30$
 (5) $6x^2 + x - 2$ (6) $9x^2 - 18xy + 8y^2$

練習15. 次の式を因数分解せよ.

- (1) $3a^2 - 6ab + 9ac$ (2) $(a+b)x - (a+b)y$

(3) $6x^4 - 3x^3y + 15x^2y^2$

(4) $a^2 - 18a + 81$

(5) $9x^2 - 30xy + 25y^2$

(6) $4ab - 4b^2 - a^2$

(7) $4x^2 - 9y^2$

(8) $1 - x^2y^2$

(9) $8ab^2 - 18ac^2$

第2講座 因数分解

練習16. 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2 - 8x + 12$

(2) $a^2 + 5ab - 150b^2$

(3) $x^2 - x - 72$

(4) $3x^2 + 10x + 3$

(5) $2x^2 - 9x + 4$

(6) $6x^2 + x - 1$

(7) $8x^2 - 2xy - 3y^2$

(8) $6a^2 - ab - 12b^2$

(9) $10p^2 - 19pq + 6q^2$

第2講座 因数分解

(A) $6x^2 + 5x - 6$

(B) $6x^2 - 5x - 6$

(C) $6x^2 - 5xy - 6y^2$

練習17. 次の式を因数分解せよ.

(1) $\alpha^3 + 8\beta^3$

(2) $27a^3 - 8b^3$

(3) $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$

次の式を因数分解せよ.

(1) $x^4 - 5x^2 + 4$

(2) $(x^2 + 4x)^2 - 9(x^2 + 4x) - 36$

(3) $x^4 + x^2 + 1$

練習18. 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^4 - 1$

(2) $16x^4 - y^4$

(3) $a^4 - 8a^2b^2 + 16b^4$

(4) $x^4 - 10x^2 + 9$

(5) $x^4 + x^2 - 2$

(6) $4x^4 - 37x^2y^2 + 9y^4$

練習19. 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^4 + 4x^2 + 16$

(2) $a^4 + 5a^2 + 9$

(3) $x^4 + 4$

(4) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$

(5) $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4$

(6) $4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$

第2講座 因数分解

練習 20. 次の式を因数分解せよ.

(1) $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8$

(2) $(x^2 + 7x + 9)(x^2 + 7x + 11) + 1$

第2講座 因数分解

例題 11 (1つの文字について整理)

次の式を因数分解せよ.

(1) $a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c$ (2) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 3x + 5y - 2$

第 2 講座 因数分解

練習 21. 次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2 + ab - c^2 - bc$

(2) $6x^2 - yz + 2xz - 3xy$

(3) $xyz + x^2y - xy^2 - x + y - z$

(4) $3x^2 - 2z^2 + 4yz + 2xy + 5xz$

第 2 講座 因数分解

練習 22. 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2 + (3y - 1)x + y(2y - 1)$

(2) $a^2 - 3ab + 2b^2 + 2a - 5b - 3$

(3) $2x^2 - 3xy + y^2 - 5x + 3y + 2$

(4) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 10x - 5y + 12$

次の式を因数分解せよ.

(1) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

(2) $a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) + 3abc$

練習 23. 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2 + 6x - 112$

(2) $2x^2 + 11x - 63$

(3) $6x^2 - xy - 15y^2$

(4) $abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$

(5) $(a^2 - b^2)x^2 - 2(a^2 + b^2)xy + (a^2 - b^2)y^2$

第2講座 因数分解

練習 24. 次の式を因数分解せよ.

(1) $48x^4 - 243$

(2) $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1$

(3) $(x^2 - 6x + 5)(x^2 - 2x - 3) + 12$

第2講座 因数分解

練習 25. 次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2 - 2ac + 4c - 4$

(2) $a^2c - ac^2 - bc^2 + abc - a^2 + ac - ab + bc$

(3) $6x^2 + 6y^2 + 12xy - 13x - 13y + 6$

(4) $x^2 - y^2 + 3z^2 + 2yz + 4zx - x - 3y + z - 2$

第2講座 因数分解

練習 26. 次の式を因数分解せよ.

(1) $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$

(2) $a^2(1-bc) - b^2(1-ca)$

(3) $a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

第2講座 因数分解

練習 27. 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2 - y^2 + 2x + 1$

(2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

(3) $x^3 - 6x^2 - 12x + 8$

(4) $a^2(a+1) + b^2(b+1) - ab$

(5) $(a^2 - 1)(b^2 - 1) - 4ab$

(6) $(x^2 - y^2)^2 - 10(x^2 + y^2) + 25$