1節 集合

1 集合

集合

「10 以下の自然数の集まり」や「すべての整数の集まり」のように，ある条件を満たすもの全体の集まりを **集合** という。それに対して「大きな数の集まり」のように，条件がはっきりしていないものの集まりは集合ではない。集合は A，B などの文字で表す。

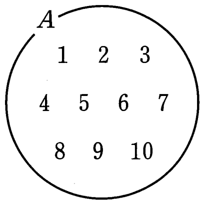
集合をつくっている個々のものを，その集合の **要素** という。

たとえば，「10 以下の自然数の集まり」を A とすると，

A は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

を要素とする集合である。



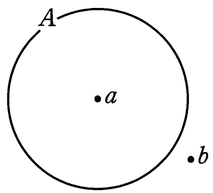
a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に **属する** といい

$$a \in A$$

で表す。また，b が集合 A の要素でないことを

$$b \notin A$$

で表す。(*)



例 1　正の偶数全体の集合を A とするとき

$$2 \in A,\qquad 3 \notin A$$

問 1　次の □ の中に $\in$，$\notin$ のいずれかを書き入れよ。

(1)　正の奇数全体の集合を A とするとき　5 □ A，6 □ A

(2)　18 の正の約数全体の集合を B とするとき　5 □ B，6 □ B

(*) $a \in A$ を $A \ni a$ と書いてもよい。また，$b \notin A$ を $A \not\ni b$ と書いてもよい。

集合の表し方

集合の表し方には，次の 2 通りの方法がある。

(ア)　**要素を書き並べる方法**

(イ)　**要素の条件を述べる方法**

たとえば，12 の正の約数全体の集合を A とするとき

(ア) の方法によると　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

(イ) の方法によると　$A=\{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$

となる。

(イ) の方法による表し方では，A の要素の代表を，たとえば x で表し，| の右側に x の満たす条件を書く。

また，集合の要素の個数が多い場合や，要素の個数が有限個でない場合には，一部の要素だけを書き，残りを $\cdots$ で表すこともある。

例 2　次の集合 A，B を (ア)，(イ) の 2 通りの方法で表してみよう。

(1)　100 以下の正の偶数全体の集合を A とするとき

(ア)　$A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$

(イ)　$A=\{x \mid x \text{ は } 100 \text{ 以下の正の偶数}\}$

(イ) の方法では，$A=\{2x \mid x \text{ は整数，} 1 \leqq x \leqq 50\}$ のようにも表される。

(2)　自然数全体の集合を B とするとき

(ア)　$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$

(イ)　$B=\{x \mid x \text{ は自然数}\}$

問 2　次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ。

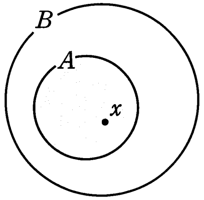
(1)　10 以下の素数全体　　(2)　100 以下の正の奇数全体

(3)　$\{x \mid x^2=4\}$　　(4)　$\{5x \mid x \text{ は整数，} x \geqq 2\}$

問 3　次の集合を，要素の条件を述べる方法で表せ。

(1)　$\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$　　(2)　$\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 999\}$

部分集合



集合Aのすべての要素が集合Bにも属しているとき，すなわち

$$x \in A \quad ならば \quad x \in B$$

であるとき，AをBの **部分集合** といい

$$\boldsymbol{A \subset B} \quad または \quad \boldsymbol{B \supset A}$$

で表す。

このとき，AはBに **含まれる**，または，BはAを **含む** という。

集合AはA自身の部分集合である。すなわち，$A \subset A$ である。

例 3 (1) $A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ とするとき

$$A \subset B$$

(2) $A=\{x \mid x$ は 6 の倍数$\}$，$B=\{x \mid x$ は 3 の倍数$\}$ とするとき

$$A \subset B$$

問 4 4 つの集合

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 4\}$, $C=\{3\}$, $D=\{x \mid x$ は 6 の正の約数$\}$

のうち，$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ の部分集合であるものはどれか。

集合Aと集合Bの要素がすべて一致しているとき，集合A，Bは **等しい** といい，$\boldsymbol{A=B}$ と書く。

集合A，Bについて，$A=B$ であるということは

$$A \subset B, \quad A \supset B$$

の両方が成り立つことである。(*)

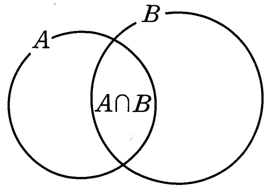
問 5 次の集合のうち，集合$\{1,\ 3\}$に等しいものはどれか。

$A=\{x \mid x<4,\ x$ は正の整数$\}$

$B=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$

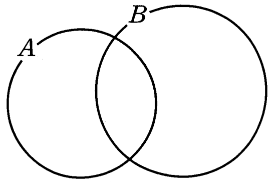
(*) $A \subset B$ であるが $A=B$ でないとき，AをBの **真部分集合** という。

共通部分と和集合



集合A，Bのどちらにも属する要素全体の集合を，AとBの **共通部分** といい，$\boldsymbol{A \cap B}$で表す。すなわち

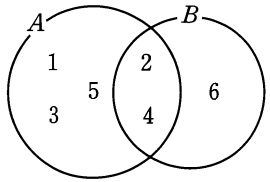
$$A \cap B=\{x \mid x \in A \quad かつ \quad x \in B\}$$



A∪B

また，集合A，Bの少なくとも一方に属する要素全体の集合を，AとBの **和集合** といい，$\boldsymbol{A \cup B}$で表す。すなわち

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \quad または \quad x \in B\}$$



例 4 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$

とするとき

$$A \cap B=\{2,\ 4\}$$

$$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

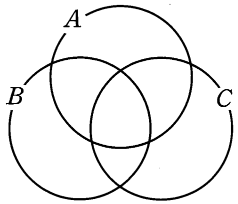
問 6 次の集合A，Bについて，$A \cap B$，$A \cup B$を求めよ。

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

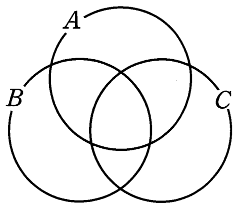
(2) $A=\{x \mid x$ は 24 の正の約数$\}$，$B=\{x \mid x$ は 32 の正の約数$\}$

3 つの集合については，集合A，B，Cのどれにも属する要素全体の集合をA，B，Cの共通部分といい，$\boldsymbol{A \cap B \cap C}$で表す。

また，集合A，B，Cの少なくとも 1 つに属する要素全体の集合をA，B，Cの和集合といい，$\boldsymbol{A \cup B \cup C}$で表す。



A∩B∩C



A∪B∪C

例5　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

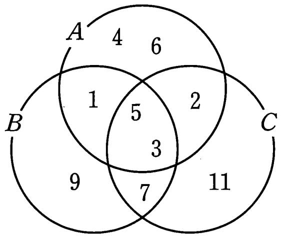
$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$

とするとき

$A\cap B\cap C=\{3,\ 5\}$

$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11\}$



問7　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

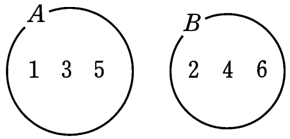
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

について，$A\cap B\cap C$，$A\cup B\cup C$ を求めよ。

空集合

$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$ とするとき，A と B には共通の要素はない。このとき，$A\cap B$ は要素をもたない集合と考えることができる。



このように，要素をもたない集合を **空集合**（くうしゅうごう） といい，ϕ で表す。これを用いると

$$A\cap B=\phi$$

となる。

どのような集合 A についても，空集合は A の部分集合と考える。

すなわち　　$\phi\subset A$

である。

例6　集合 $\{1,\ 2\}$ のすべての部分集合は，次の 4 つである。

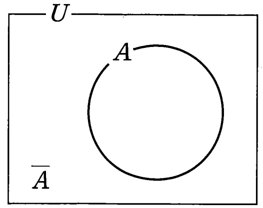
$$\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}$$

問8　集合 $\{3,\ 4,\ 5\}$ の部分集合をすべてあげよ。

2 補集合とド・モルガンの法則

集合を考えるときは，あらかじめ 1 つの集合 U を定め，その部分集合について考えることが多い。このとき，U を **全体集合** という。

全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素で A に属さないもの全体の集合を A の **補集合** といい，$\overline{A}$ で表す。



すなわち

$$\overline{A}=\{x\,|\,x\in U\quad かつ\quad x\notin A\}$$

である。

例7　$U=\{x\,|\,x$ は 10 より小さい自然数$\}$

を全体集合とするとき

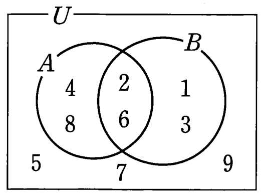
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

とすると

$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$\overline{A}\cap B=\{1,\ 3\}$



問9　$U=\{x\,|\,x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

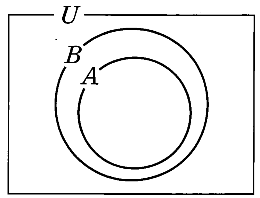
$A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$ について，次の集合を求めよ。

(1)　$\overline{A}$　　(2)　$A\cap\overline{B}$　　(3)　$\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4)　$\overline{A\cap B}$

補集合については，次のことが成り立つ。

$$\boldsymbol{A\cap\overline{A}=\phi,\qquad A\cup\overline{A}=U,\qquad \overline{(\overline{A})}=A}$$

問10　$A\subset B$ ならば $\overline{A}\supset\overline{B}$ であることを，右の図を用いて確かめよ。



また，補集合について，次の **ド・モルガンの法則** が成り立つ。

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

例 8 ド・モルガンの法則の第 1 式を確かめてみよう。

$\overline{A \cup B}$ は図 1 の色で示した部分である。

$\overline{A}$ は図 2，$\overline{B}$ は図 3 の色で示した部分であるから，$\overline{A} \cap \overline{B}$ は $\overline{A \cup B}$ に一致する。

図 1

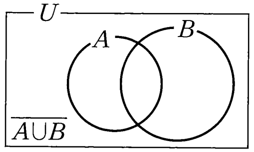


図 2

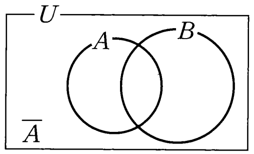
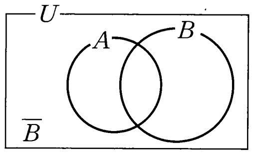


図 3



問 11 ド・モルガンの法則の第 2 式を，上にならって確かめよ。

問 12 $U = \{x \mid x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 3, 4, 7\}$

について，$\overline{A} \cap \overline{B}$ を求めよ。

問題

1 $U = \{x \mid x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B = \{2, 3, 5, 7\}$，$C = \{7, 8, 9\}$

について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A \cap B}$　　(2) $\overline{A} \cap \overline{B}$

(3) $A \cap \overline{B}$　　(4) $A \cup B \cup C$

(5) $A \cap B \cap C$　　(6) $A \cap B \cap \overline{C}$

2節 命題と論証

1 命題と条件

命題と条件

「$\sqrt{4}$ は整数である」は正しいが，「$2+3=4$」は正しくない。一方，「1000 は大きな数である」は正しいとも正しくないとも判断できない。

一般に，正しいか正しくないかが定まる文や式を **命題** という。命題が正しいとき，その命題は **真** である，または，成り立つといい，正しくないとき，**偽** である，または，成り立たないという。正しいか正しくないかが定まらない文や式は，命題ではない。

例 1 (1) 「$3^2+4^2=5^2$」は命題であり，真である。

(2) 「7 は偶数である」は命題であり，偽である。

(3) 「正三角形は直角二等辺三角形より美しい三角形である」は，正しいとも正しくないとも判断できないから，命題ではない。

問 1 次の命題の真偽を答えよ。

(1) $3^3+4^3+5^3=6^3$　　(2) $\sqrt{(-3)^2}=-3$

「$x<0$」は，$x=-1$ のときは真であるが，$x=2$ のときは偽であり，x の値によって真偽が決まる。このように，変数を含む文や式で，その変数に値を代入したときに，真偽が決まる文や式を **条件** という。条件は p，q などの文字で表すこともある。

例 2 「$x>-3$」は，x に 2 や -2 を代入したときには真となり，-3 や -4 を代入したときには偽となるから，条件である。

問 2 「$x^2-2x-15=0$」が真となるような x の値を求めよ。

問 3 「$3x+12>0$」が真となるような x の値の範囲を求めよ。

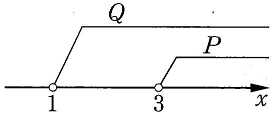
命題「$p \Longrightarrow q$」

数学では，p，q を条件として「p ならば q である」という形の命題を考えることが多い。この命題を $\Longrightarrow$ という記号を使って

「$p \Longrightarrow q$」

と表す。このとき，p をこの命題の **仮定**，q を **結論** という。

例 3　x に関する 2 つの条件を $p：x>3$，$q：x>1$ とするとき，
命題「$x>3$ ならば $x>1$」が成り立つから，
命題「$p \Longrightarrow q$」は真である。
また，条件 p，q を満たすものの集合 P，Q は，数直線上ではそれぞれ右の図のようになるから，$P \subset Q$ が成り立っている。



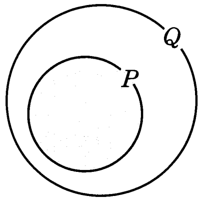
注意　p が条件「$x>1$」を表すとき，$p：x>1$ と書くことがある。

一般に，条件 p，q を満たすものの集合をそれぞれ P，Q で表すとき

命題「$p \Longrightarrow q$」が真

であることは　**$P \subset Q$**

が成り立つことと同じである。

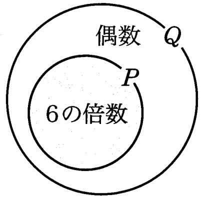


また，命題「$p \Longrightarrow q$」が真で，かつ命題「$q \Longrightarrow p$」が真であるとき

「$p \Longleftrightarrow q$」

と表す。これは，**$P=Q$** が成り立つことと同じである。

例 4　自然数 n に関する 2 つの条件
$p：n$ は 6 の倍数，　$q：n$ は偶数
を満たす n の集合をそれぞれ P，Q とすると
$P \subset Q$
が成り立つから，命題「$p \Longrightarrow q$」は真である。
しかし，$P=Q$ が成り立たないから「$p \Longleftrightarrow q$」ではない。



問 4　次の条件 p，q について，命題「$p \Longrightarrow q$」の真偽を，集合を考えることによって答えよ。

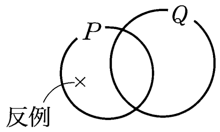
(1)　$p：-2<x$　　　$q：x<5$
(2)　$p：-8<x<-5$　　　$q：x<1$
(3)　p：自然数 n は 12 の倍数　　q：自然数 n は 3 の倍数
(4)　p：自然数 n は 72 の約数　　q：自然数 n は 84 の約数

問 5　条件を満たす x の集合を考えることによって
命題「$-2<x<3 \Longrightarrow p$」が真となる条件 p
命題「$q \Longrightarrow -2<x<3$」が真となる条件 q
をそれぞれ次の中から選べ。
①　$x<5$　　②　$-1 \leqq x \leqq 1$　　③　$0 \leqq x \leqq 3$

ある命題「$p \Longrightarrow q$」が偽であることを示すには

「p であるのに q でない」

という例を 1 つあげればよい。このような例を，その命題に対する **反例** という。



例 5　命題「$x^2=4 \Longrightarrow x=2$」には，$x=-2$ という反例があるから，この命題は偽である。

問 6　次の命題の真偽を答えよ。また，偽であるときは反例をあげよ。

(1)　$5x=15 \Longrightarrow x=3$
(2)　$x^2=2x \Longrightarrow x=2$
(3)　自然数 n は素数 $\Longrightarrow$ 自然数 n は奇数

必要条件と十分条件

2 つの条件 p，q について，命題「$p \Longrightarrow q$」が成り立つとき

p は q であるための **十分条件** である
q は p であるための **必要条件** である

という。

$p \Longrightarrow q$
十分条件　**必要条件**