1節 集合

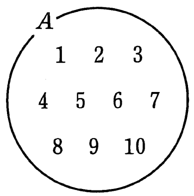
1 集合

集合

「10 以下の自然数の集まり」や「すべての整数の集まり」のように，ある条件を満たすもの全体の集まりを **集合** という。それに対して「大きな数の集まり」のように，条件がはっきりしていないものの集まりは集合ではない。集合は A，B などの文字で表す。

集合をつくっている個々のものを，その集合の **要素** という。

たとえば，「10 以下の自然数の集まり」を A とすると，

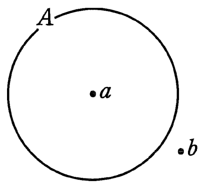


A は

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$$

を要素とする集合である。

a が集合 A の要素であるとき，a は集合 A に **属する** といい



$$a \in A$$

で表す。また，b が集合 A の要素でないことを

$$b \notin A$$

で表す。(*)

例 1　正の偶数全体の集合を A とするとき

$$2 \in A, \qquad 3 \notin A$$

問 1　次の □ の中に $\in$，$\notin$ のいずれかを書き入れよ。

(1)　正の奇数全体の集合を A とするとき　$5 \square A$，$6 \square A$

(2)　18 の正の約数全体の集合を B とするとき　$5 \square B$，$6 \square B$

(*) $a \in A$ を $A \ni a$ と書いてもよい。また，$b \notin A$ を $A \not\ni b$ と書いてもよい。

集合の表し方

集合の表し方には，次の 2 通りの方法がある。

(ア)　**要素を書き並べる方法**

(イ)　**要素の条件を述べる方法**

たとえば，12 の正の約数全体の集合を A とするとき

(ア) の方法によると　$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$

(イ) の方法によると　$A=\{x \mid x$ は 12 の正の約数$\}$

となる。

(イ) の方法による表し方では，A の要素の代表を，たとえば x で表し，$|$ の右側に x の満たす条件を書く。

また，集合の要素の個数が多い場合や，要素の個数が有限個でない場合には，一部の要素だけを書き，残りを $\cdots$ で表すこともある。

例 2　次の集合 A，B を (ア)，(イ) の 2 通りの方法で表してみよう。

(1)　100 以下の正の偶数全体の集合を A とするとき

(ア)　$A=\{2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 100\}$

(イ)　$A=\{x \mid x$ は 100 以下の正の偶数$\}$

(イ) の方法では，$A=\{2x \mid x$ は整数，$1 \leqq x \leqq 50\}$ のようにも表される。

(2)　自然数全体の集合を B とするとき

(ア)　$B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$

(イ)　$B=\{x \mid x$ は自然数$\}$

問 2　次の集合を，要素を書き並べる方法で表せ。

(1)　10 以下の素数全体　　(2)　100 以下の正の奇数全体

(3)　$\{x \mid x^2=4\}$　　(4)　$\{5x \mid x$ は整数，$x \geqq 2\}$

問 3　次の集合を，要素の条件を述べる方法で表せ。

(1)　$\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$　　(2)　$\{1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 999\}$

部分集合

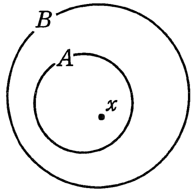
集合Aのすべての要素が集合Bにも属しているとき，すなわち

$$x \in A \quad ならば \quad x \in B$$

であるとき，AをBの **部分集合** といい

$$\boldsymbol{A \subset B} \quad または \quad \boldsymbol{B \supset A}$$

で表す。



このとき，AはBに **含まれる**，または，BはAを **含む** という。

集合AはA自身の部分集合である。すなわち，$A \subset A$ である。

例3 (1) $A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ とするとき

$$A \subset B$$

(2) $A=\{x \mid x は 6 の倍数\}$，$B=\{x \mid x は 3 の倍数\}$ とするとき

$$A \subset B$$

問4 4つの集合

$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{1,\ 2,\ 4\}$，$C=\{3\}$，$D=\{x \mid x は 6 の正の約数\}$

のうち，$E=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$ の部分集合であるものはどれか。

集合Aと集合Bの要素がすべて一致しているとき，集合A，Bは **等しい** といい，$\boldsymbol{A=B}$ と書く。

集合A，Bについて，$A=B$ であるということは

$$A \subset B, \quad A \supset B$$

の両方が成り立つことである。(*)

問5 次の集合のうち，集合$\{1,\ 3\}$に等しいものはどれか。

$$A=\{x \mid x<4,\ \ x は正の整数\}$$

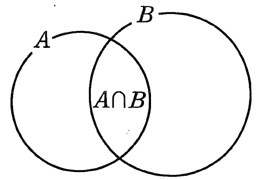
$$B=\{x \mid x^2-4x+3=0\}$$

(*) $A \subset B$ であるが $A=B$ でないとき，AをBの **真部分集合** という。

共通部分と和集合

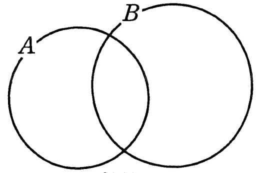
集合A，Bのどちらにも属する要素全体の集合を，AとBの **共通部分** といい，$\boldsymbol{A \cap B}$ で表す。すなわち

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \quad かつ \quad x \in B\}$$



また，集合A，Bの少なくとも一方に属する要素全体の集合を，AとBの **和集合** といい，$\boldsymbol{A \cup B}$ で表す。すなわち

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \quad または \quad x \in B\}$$

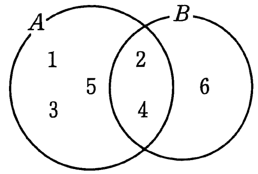


A∪B

例4 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$ とするとき

$$A \cap B=\{2,\ 4\}$$

$$A \cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$



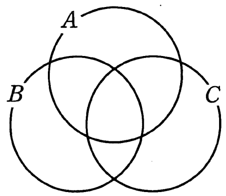
問6 次の集合A，Bについて，$A \cap B$，$A \cup B$を求めよ。

(1) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

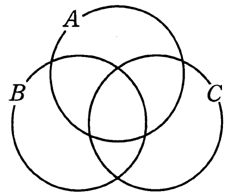
(2) $A=\{x \mid x は 24 の正の約数\}$，$B=\{x \mid x は 32 の正の約数\}$

3つの集合については，集合A，B，Cのどれにも属する要素全体の集合をA，B，Cの共通部分といい，$\boldsymbol{A \cap B \cap C}$ で表す。

また，集合A，B，Cの少なくとも1つに属する要素全体の集合をA，B，Cの和集合といい，$\boldsymbol{A \cup B \cup C}$ で表す。



A∩B∩C



A∪B∪C

例5 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

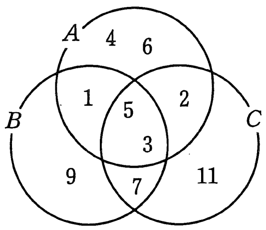
$B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$C=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11\}$

とするとき

$A\cap B\cap C=\{3,\ 5\}$

$A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 11\}$



問7 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

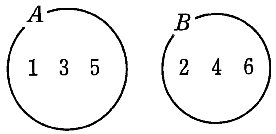
$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$C=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

について，$A\cap B\cap C$，$A\cup B\cup C$ を求めよ。

空集合

$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，$B=\{2,\ 4,\ 6\}$ とするとき，A と B には共通の要素はない。このとき，$A\cap B$ は要素をもたない集合と考えることができる。



このように，要素をもたない集合を **空集合**(くうしゅうごう) といい，ϕ で表す。これを用いると

$$A\cap B=\phi$$

となる。

どのような集合 A についても，空集合は A の部分集合と考える。

すなわち　　$\phi\subset A$

である。

例6 集合 $\{1,\ 2\}$ のすべての部分集合は，次の4つである。

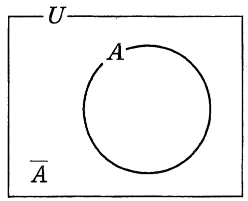
$$\phi,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,\ 2\}$$

問8 集合 $\{3,\ 4,\ 5\}$ の部分集合をすべてあげよ。

2 補集合とド・モルガンの法則

集合を考えるときは，あらかじめ1つの集合 U を定め，その部分集合について考えることが多い。このとき，U を **全体集合** という。

全体集合 U の部分集合 A に対して，U の要素で A に属さないもの全体の集合を A の **補集合** といい，$\overline{A}$ で表す。



すなわち

$$\overline{A}=\{x\,|\,x\in U\quad \text{かつ}\quad x\notin A\}$$

である。

例7 $U=\{x\,|\,x$ は10より小さい自然数$\}$

を全体集合とするとき

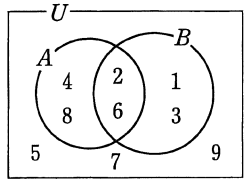
$A=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

とすると

$\overline{A}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

$\overline{A}\cap B=\{1,\ 3\}$



問9 $U=\{x\,|\,x$ は10より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

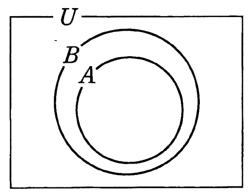
$A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$ について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A}$　　(2) $A\cap\overline{B}$　　(3) $\overline{A}\cup\overline{B}$　　(4) $\overline{A\cap B}$

補集合については，次のことが成り立つ。

$$A\cap\overline{A}=\phi,\qquad A\cup\overline{A}=U,\qquad \overline{(\overline{A})}=A$$

問10 $A\subset B$ ならば $\overline{A}\supset\overline{B}$ であることを，右の図を用いて確かめよ。



また，補集合について，次の **ド・モルガンの法則** が成り立つ。

ド・モルガンの法則

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

例 8 ド・モルガンの法則の第 1 式を確かめてみよう。

$\overline{A\cup B}$ は図 1 の色で示した部分である。

$\overline{A}$ は図 2，$\overline{B}$ は図 3 の色で示した部分であるから，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は $\overline{A\cup B}$ に一致する。

図 1

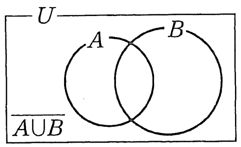


図 2

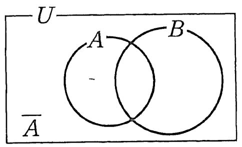
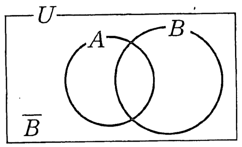


図 3



問11 ド・モルガンの法則の第 2 式を，上にならって確かめよ。

問12 $U=\{x\,|\,x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$

$B=\{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$

について，$\overline{A}\cap\overline{B}$ を求めよ。

問　題

1 $U=\{x\,|\,x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$C=\{7,\ 8,\ 9\}$

について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A\cap B}$　　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) $A\cap\overline{B}$　　(4) $A\cup B\cup C$

(5) $A\cap B\cap C$　　(6) $A\cap B\cap\overline{C}$