高校準備授業②　標準クラス

$\boxed{1}$ (1) $a=3$ のとき　$a^2+4a-21=3^2+4\cdot3-21=0$

よって，この命題は真である。

(2) $a=1$，$b=2$，$c=0$ のとき，$ac=bc$ であるが，$a=b$ でない。

よって，この命題は偽である。

(3) $a=1+\sqrt{2}$，$b=1-\sqrt{2}$ のとき，$a+b=2$，$ab=-1$（ともに整数）であるが，a，b は整数でない。

よって，この命題は偽である。

$\boxed{2}$ (1) $a=0$ のとき　$ab=0\cdot b=0$　　よって，この命題は真である。

(2) $a=0$ のとき，$a^2=2a$ であるが，$a=2$ でない。

よって，この命題は偽である。

(3) $n=4$ のとき $n+2=6$ となり，n は偶数であるが，$n+2$ は 4 の倍数でない。

よって，この命題は偽である。

$\boxed{3}$ (1) 偽（反例：$n=6$）

$n=6$ のとき，n は偶数であるが，n は 4 の倍数でない。

(2) 偽（反例：$n=5$）

$n=5$ のとき，n は奇数であるが，$10n+1=51$ は $51=3\cdot17$ であるから素数でない。

$\boxed{4}$ (1) 偽（反例：$n=6$）

$n=6$ のとき　$n^2=36$ で 4 の倍数であるが，n は 4 の倍数でない。

(2) $n^2+n=n(n+1)$

n と $n+1$ のどちらかは 2 の倍数であるから，$n(n+1)$ は 2 の倍数である。

また，n は 3 の倍数であるから，$n(n+1)$ は 3 の倍数である。

よって，$n(n+1)$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから，6 の倍数である。

ゆえに，与えられた命題は　真

別解　$n=3k$（k は整数）とすると

$$n^2+n=(3k)^2+3k=9k^2+3k=6k^2+3k(k+1)$$

k と $k+1$ のどちらかは 2 の倍数であるから，$k(k+1)$ は 2 の倍数である。

よって，$k(k+1)=2l$（l は整数）とすると

$$n^2+n=6k^2+3\cdot2l=6(k^2+l)$$

k^2+l は整数であるから，$6(k^2+l)$ は 6 の倍数である。

ゆえに，n^2+n は 6 の倍数である。

したがって，与えられた命題は　真

$\boxed{5}$ (1) (反例)　$x=-1$，$y=-1$

$xy>0$ であるが，$x>0$ または $y>0$ を満たさない。

よって，偽。

(2) (反例)　$x=3$，$y=0$

$xy=0$ であるが，$x=0$ かつ $y=0$ を満たさない。

よって，偽。

(3) (反例)　$x=3$，$y=-1$

$x+y>0$ であるが，$x>0$ かつ $y>0$ を満たさない。

よって，偽。

(4) (反例)　$x=2$，$y=0$

$x+y=2$ かつ $xy=0$ であるが，$x=0$ かつ $y=2$ を満たさない。

よって，偽。

$\boxed{6}$ (1) $x=2$ のとき　$x^2-x-2=2^2-2-2=0$

よって，「$x=2 \Longrightarrow x^2-x-2=0$」は真。

また，$x^2-x-2=0$ を解くと　$x=-1,\ 2$

よって，「$x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=2$」は偽。　（反例：$x=-1$）

したがって　十分条件であるが必要条件でない

(2) 「$\triangle ABC \backsim \triangle PQR \Longrightarrow \triangle ABC \equiv \triangle PQR$」は偽，

「$\triangle ABC \equiv \triangle PQR \Longrightarrow \triangle ABC \backsim \triangle PQR$」は真。

したがって　必要条件であるが十分条件でない

(3) $x=y=2$ のとき　$2x-y=2\cdot2-2=2$，$2y-x=2\cdot2-2=2$

よって，「$x=y=2 \Longrightarrow 2x-y=2y-x=2$」は真。

$2x-y=2$，$2y-x=2$ を連立方程式として解くと　$x=2$，$y=2$

よって，「$2x-y=2y-x=2 \Longrightarrow x=y=2$」は真。

したがって　必要十分条件である

(4) 「$xy\neq0 \Longrightarrow x\neq0$」は真。

$x\neq0$，$y=0$ のとき $xy=0$

よって，「$x\neq0 \Longrightarrow xy\neq0$」は偽。

したがって　十分条件であるが必要条件でない

$\boxed{7}$ (1) $xy=yz=zx=0 \Longrightarrow x=y=z=0$ は偽。反例：$x=y=0$，$z=1$

$x=y=z=0 \Longrightarrow xy=yz=zx=0$ は真。

よって　（イ）

(2) $x>2 \Longrightarrow x^2\neq1$ は真。

$x^2\neq1 \Longrightarrow x>2$ は偽。反例：$x=0$

よって　（ウ）

(3) $x+y>0 \Longrightarrow xy>0$ は偽。反例：$x=2$，$y=-1$

$xy>0 \Longrightarrow x+y>0$ も偽。反例：$x=-1$，$y=-1$

よって　（エ）

$\boxed{8}$ (1) $a=3$ かつ $b=2$ のとき　$a+b=3+2=5$

よって，「$a=3$ かつ $b=2 \Longrightarrow a+b=5$」は真である。

$a=1$，$b=4$ のとき，$a+b=5$ であるが，$a=3$ かつ $b=2$ でない。

よって，「$a+b=5 \Longrightarrow a=3$ かつ $b=2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(2) $x=3$ のとき　$x^2-6x+9=3^2-6\cdot3+9=0$

よって，「$x=3 \Longrightarrow x^2-6x+9=0$」は真である。

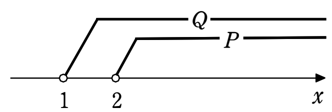
$x^2-6x+9=0$ を解くと　$(x-3)^2=0$　　ゆえに　$x=3$

よって，「$x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$」は真である。

したがって，必要十分条件である。

(3) $P=\{x \mid x>2\}$，$Q=\{x \mid x>1\}$ とする。

P，Q は右の図のようになり　$P\subset Q$

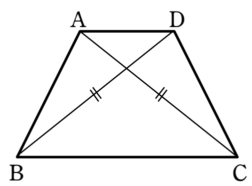


よって，「$x>2 \Longrightarrow x>1$」は真であり，

「$x>1 \Longrightarrow x>2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(4) 右の図のような AD∥BC，AB＝DC の等脚台形において，2 本の対角線の長さは等しいが，長方形でない。



よって，「2 本の対角線の長さが等しい $\Longrightarrow$ 長方形である」は偽である。

また，「長方形である $\Longrightarrow$ 2 本の対角線の長さは等しい」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(5) $a=1$，$b=2$，$c=-1$ のとき，$a<b$ であるが，$ac<bc$ でない。

よって，「$a<b \Longrightarrow ac<bc$」は偽である。

$a=-1$，$b=-2$，$c=-1$ のとき，$ac<bc$ であるが，$a<b$ でない。

よって，「$ac<bc \Longrightarrow a<b$」は偽である。

したがって，必要条件でも十分条件でもない。

(6) 12 は 4 かつ 6 の倍数であるが，24 の倍数でない。

よって，「4 かつ 6 の倍数 $\Longrightarrow$ 24 の倍数」は偽である。

また，「24 の倍数 $\Longrightarrow$ 4 かつ 6 の倍数」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

$\boxed{9}$ (1) 否定は　「ある素数 n について，n は偶数である。」

2 は素数であり，かつ偶数であるから，もとの命題は偽，否定は真である。

(2) 否定は　「すべての実数 x について　$x^2>0$」

$x=0$ のとき $x^2=0$ となるから，もとの命題は真，否定は偽である。

$\boxed{10}$ (1) m，n の少なくとも一方は偶数

(2) m，n はともに 3 の倍数でない

(3) $x\leqq0$ かつ $y>0$

(4) $x\neq0$ または $y=0$

$\boxed{11}$ (1) （ア）$x+y<2$　　（イ）m は偶数である。

（ウ）$x\neq0$ または $y=0$

（エ）$x\leqq0$ かつ $x>-2$　　すなわち　$-2<x\leqq0$

（オ）m，n はともに 5 の倍数でない。

(2) 条件 $(x-1)(y-2)=0$ を「かつ」，「または」を用いて表すと

$x-1=0$ または $y-2=0$　　すなわち　$x=1$ または $y=2$

この条件の否定は　$x\neq1$ かつ $y\neq2$

$\boxed{12}$ もとの命題は偽である。(反例：$x=5$，$y=3$)

逆は　「$x=3$ かつ $y=5$」$\Longrightarrow xy=15$　　これは真である。

対偶は　「$x\neq3$ または $y\neq5$」$\Longrightarrow xy\neq15$

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=5$，$y=3$)

裏は　$xy\neq15 \Longrightarrow$「$x\neq3$ または $y\neq5$」

逆が真であるから，裏も真である。

$\boxed{13}$ (1) もとの命題は真である。

逆は　「平行四辺形ならば，長方形である。」　　これは偽である。

対偶は　「平行四辺形でないならば，長方形でない。」

もとの命題が真であるから，対偶も真である。

裏は　「長方形でないならば，平行四辺形でない。」

逆が偽であるから，裏も偽である。

(2) もとの命題は偽である。(反例：$x=2$)

逆は　$(x-1)(x-2)\neq0 \Longrightarrow x\neq1$

対偶は　$(x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow x=1$

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=2$)

裏は　$x=1 \Longrightarrow (x-1)(x-2)=0$　　これは真である。

裏が真であるから，逆も真である。

(3) もとの命題は偽である。(反例：$x=-1$，$y=2$)

逆は　$x+y<0 \Longrightarrow$「$x<0$ または $y<0$」

対偶は　$x+y\geqq0 \Longrightarrow$「$x\geqq0$ かつ $y\geqq0$」

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=-1$，$y=2$)

裏は　「$x\geqq0$ かつ $y\geqq0$」$\Longrightarrow x+y\geqq0$　　これは真である。

裏が真であるから，逆も真である。

注意　(2)，(3) では，逆の真偽は判定しにくいため，まず裏の真偽を調べた。

$\boxed{14}$ (1)　もとの命題：真

逆：$xy>0$ ならば「$x>0$ かつ $y>0$」

これは偽である。　(反例)　$x=-1$ かつ $y=-1$

対偶：$xy\leqq 0$ ならば「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」

これは真である。

裏：「$x\leqq 0$ または $y\leqq 0$」ならば $xy\leqq 0$

これは偽である。　(反例)　$x=-1$ かつ $y=-1$

(2)　もとの命題：真

逆：「$x=3$ または $y=6$」ならば $(x-3)(y-6)=0$

これは真である。

対偶：「$x\neq 3$ かつ $y\neq 6$」ならば $(x-3)(y-6)\neq 0$

これは真である。

裏：$(x-3)(y-6)\neq 0$ ならば「$x\neq 3$ かつ $y\neq 6$」

これは真である。