また，補集合について，次の **ド・モルガンの法則** が成り立つ。

ド・モルガンの法則

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\qquad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

例 8 ド・モルガンの法則の第 1 式を確かめてみよう。

$\overline{A\cup B}$ は図 1 の色で示した部分である。

$\overline{A}$ は図 2，$\overline{B}$ は図 3 の色で示した部分であるから，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は $\overline{A\cup B}$ に一致する。

図 1

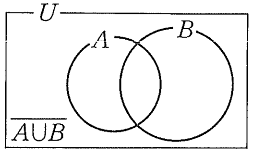


図 2

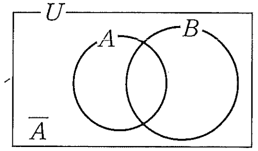
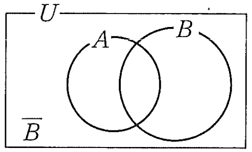


図 3



問11 ド・モルガンの法則の第 2 式を，上にならって確かめよ。

問12 $U=\{x\mid x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

$A=\{2,\ 4,\ 6\}$

$B=\{1,\ 3,\ 4,\ 7\}$

について，$\overline{A}\cap\overline{B}$ を求めよ。

問題

1 $U=\{x\mid x$ は 10 より小さい自然数$\}$ を全体集合とする。

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$，$B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$C=\{7,\ 8,\ 9\}$

について，次の集合を求めよ。

(1) $\overline{A\cap B}$　　(2) $\overline{A}\cap\overline{B}$

(3) $A\cap\overline{B}$　　(4) $A\cup B\cup C$

(5) $A\cap B\cap C$　　(6) $A\cap B\cap\overline{C}$

2節 命題と論証

1 命題と条件

命題と条件

「$\sqrt{4}$ は整数である」は正しいが，「$2+3=4$」は正しくない。一方，「1000 は大きな数である」は正しいとも正しくないとも判断できない。

一般に，正しいか正しくないかが定まる文や式を **命題** という。命題が正しいとき，その命題は **真** である，または，成り立つといい，正しくないとき，**偽** である，または，成り立たないという。正しいか正しくないかが定まらない文や式は，命題ではない。

例 1 (1) 「$3^2+4^2=5^2$」は命題であり，真である。

(2) 「7 は偶数である」は命題であり，偽である。

(3) 「正三角形は直角二等辺三角形より美しい三角形である」は，正しいとも正しくないとも判断できないから，命題ではない。

問 1 次の命題の真偽を答えよ。

(1) $3^3+4^3+5^3=6^3$　　(2) $\sqrt{(-3)^2}=-3$

「$x<0$」は，$x=-1$ のときは真であるが，$x=2$ のときは偽であり，x の値によって真偽が決まる。このように，変数を含む文や式で，その変数に値を代入したときに，真偽が決まる文や式を **条件** という。条件は p，q などの文字で表すこともある。

例 2 「$x>-3$」は，x に 2 や -2 を代入したときには真となり，-3 や -4 を代入したときには偽となるから，条件である。

問 2 「$x^2-2x-15=0$」が真となるような x の値を求めよ。

問 3 「$3x+12>0$」が真となるような x の値の範囲を求めよ。

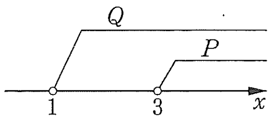
命題「$p \Longrightarrow q$」

数学では，p，q を条件として「p ならば q である」という形の命題を考えることが多い。この命題を $\Longrightarrow$ という記号を使って

$$「p \Longrightarrow q」$$

と表す。このとき，p をこの命題の **仮定**，q を **結論** という。

例 3　x に関する 2 つの条件を $p：x>3$，$q：x>1$ とするとき，
命題「$x>3$ ならば $x>1$」が成り立つから，
命題「$p \Longrightarrow q$」は真である。
また，条件 p，q を満たすものの集合 P，Q は，数直線上ではそれぞれ右の図のようになるから，$P \subset Q$ が成り立っている。



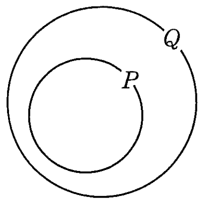
注意　p が条件「$x>1$」を表すとき，$p：x>1$ と書くことがある。

一般に，条件 p，q を満たすものの集合をそれぞれ P，Q で表すとき

命題「$p \Longrightarrow q$」が真

であることは　$P \subset Q$

が成り立つことと同じである。

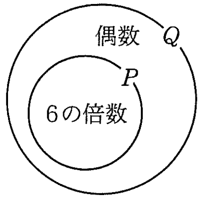


また，命題「$p \Longrightarrow q$」が真で，かつ命題「$q \Longrightarrow p$」が真であるとき

$$「p \Longleftrightarrow q」$$

と表す。これは，$P=Q$ が成り立つことと同じである。

例 4　自然数 n に関する 2 つの条件
$p：n$ は 6 の倍数，　$q：n$ は偶数
を満たす n の集合をそれぞれ P，Q とすると
$P \subset Q$
が成り立つから，命題「$p \Longrightarrow q$」は真である。
しかし，$P=Q$ が成り立たないから「$p \Longleftrightarrow q$」ではない。



問 4　次の条件 p，q について，命題「$p \Longrightarrow q$」の真偽を，集合を考えることによって答えよ。

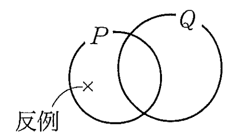
(1)　$p：-2<x$　　$q：x<5$
(2)　$p：-8<x<-5$　　$q：x<1$
(3)　p：自然数 n は 12 の倍数　　q：自然数 n は 3 の倍数
(4)　p：自然数 n は 72 の約数　　q：自然数 n は 84 の約数

問 5　条件を満たす x の集合を考えることによって
命題「$-2<x<3 \Longrightarrow p$」が真となる条件 p
命題「$q \Longrightarrow -2<x<3$」が真となる条件 q
をそれぞれ次の中から選べ。
①　$x<5$　　②　$-1 \leqq x \leqq 1$　　③　$0 \leqq x \leqq 3$

ある命題「$p \Longrightarrow q$」が偽であることを示すには

「p であるのに q でない」

という例を 1 つあげればよい。このような例を，その命題に対する **反例** という。



例 5　命題「$x^2=4 \Longrightarrow x=2$」には，$x=-2$ という反例があるから，この命題は偽である。

問 6　次の命題の真偽を答えよ。また，偽であるときは反例をあげよ。

(1)　$5x=15 \Longrightarrow x=3$
(2)　$x^2=2x \Longrightarrow x=2$
(3)　自然数 n は素数 $\Longrightarrow$ 自然数 n は奇数

必要条件と十分条件

2 つの条件 p，q について，命題「$p \Longrightarrow q$」が成り立つとき

p は q であるための **十分条件** である
q は p であるための **必要条件** である

という。

$p \Longrightarrow q$
十分条件　必要条件

例 6　x に関する 2 つの条件 $p : x=2$, $q : x^2=4$ について,「$p \Longrightarrow q$」は成り立つが,「$q \Longrightarrow p$」は成り立たない。

よって

　p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

　q は p であるための必要条件であるが，十分条件ではない。

問 7　次の $\square$ の中に，必要 または 十分 のうち，適切なものを入れよ。

(1)　$x>1$ は $x>0$ であるための $\square$ 条件である。

(2)　$x<3$ は $-1<x<2$ であるための $\square$ 条件である。

(3)　$x=6$ は $x^2=36$ であるための $\square$ 条件である。

(4)　自然数 n が偶数であることは $n=4$ であるための $\square$ 条件である。

2 つの条件 p, q について,「$p \Longleftrightarrow q$」であるとき

　p は q であるための **必要十分条件** である

という。このとき，q は p であるための必要十分条件でもある。また，p と q は **同値** であるともいう。

例 7　p : △ABC は長さの等しい 3 辺をもつ

　q : △ABC は大きさの等しい 3 つの内角をもつ

について，2 つの命題「$p \Longrightarrow q$」,「$q \Longrightarrow p$」がともに成り立つから,「$p \Longleftrightarrow q$」であり，p と q は同値である。

問 8　次の条件 p, q について，p は q であるための必要条件である，十分条件である，必要十分条件である，または，必要条件でも十分条件でもない，のうち最も適切なものを答えよ。

(1)　$p : x^2=5$　　　$q : x=\sqrt{5}$

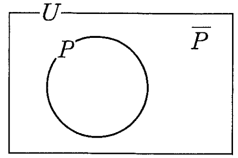
(2)　p : 整数 a, b は同符号である。　　q : 整数 a, b の積は正である。

(3)　p : 自然数 n は 6 の倍数である。　　q : 自然数 n は 3 の倍数である。

(4)　p : 四角形 F の内角の大きさはすべて等しい。

　q : 四角形 F の辺の長さはすべて等しい。

条件の否定とド・モルガンの法則



p でない

条件 p に対し「p でない」という条件を p の **否定** といい，$\overline{p}$ で表す。$\overline{p}$ を満たすものの集合は，p を満たすものの集合 P の補集合 $\overline{P}$ となる。

例 8　(1)　条件「$x>1$」の否定は,「$x \leqq 1$」である。

(2)　条件「自然数 n は奇数」の否定は,「自然数 n は偶数」である。

問 9　次の条件の否定を述べよ。

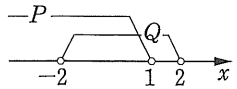
(1)　$x \leqq -2$　　　(2)　自然数 n は 3 で割り切れる。

条件 p, q を満たすものの集合をそれぞれ P, Q とすると,「p かつ q」,「p または q」を満たすものの集合は，それぞれ $P \cap Q$, $P \cup Q$ である。

例 9　条件 $p : x<1$, $q : -2<x<2$ において

　条件「p かつ q」は「$-2<x<1$」

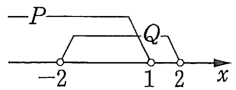
であり



p かつ q

　条件「p または q」は「$x<2$」

である。



p または q

問 10　次の条件を満たす x の集合は，数直線上ではどのような範囲になるか。

(1)　$x<3$ かつ $x<5$　　　(2)　$x \geqq 2$ または $-4<x<5$

54 ページの集合に関するド・モルガンの法則から，2 つの条件 p, q について次の法則が導かれる。

ド・モルガンの法則

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Longleftrightarrow \overline{p} \text{ または } \overline{q}, \qquad \overline{p \text{ または } q} \Longleftrightarrow \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$$

例 10　「$x<2$ かつ $y \geqq 5$」の否定は「$x \geqq 2$ または $y<5$」である。

「$x=2$ または $y=5$」の否定は「$x \neq 2$ かつ $y \neq 5$」である。

問 11　次の条件の否定を述べよ。

(1)　$x \geqq 1$ かつ $y \leqq 4$　　　(2)　$x \leqq 5$ または $y>8$

2 論証

命題の逆・裏・対偶

命題「$p \Longrightarrow q$」と関連する命題を考えてみよう。

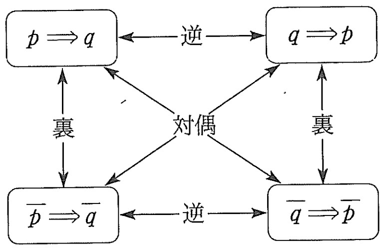
命題「$p \Longrightarrow q$」に対して

命題「$q \Longrightarrow p$」 を「$p \Longrightarrow q$」の **逆**

命題「$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$」を「$p \Longrightarrow q$」の **裏**

命題「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」を「$p \Longrightarrow q$」の **対偶**

という。



例11 命題「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」について

この命題の逆は「$x^2=4 \Longrightarrow x=2$」

この命題の裏は「$x \neq 2 \Longrightarrow x^2 \neq 4$」

この命題の対偶は「$x^2 \neq 4 \Longrightarrow x \neq 2$」

である。これらの命題の真偽を考えると，もとの命題と対偶は真，逆と裏は $x=-2$ という反例をもつから，偽である。

例 11 から次のことがいえる。

命題が真であっても，その命題の **逆は真とは限らない**。

また，裏も真とは限らない。

問12 次の命題の逆，裏，対偶をつくり，その真偽を答えよ。

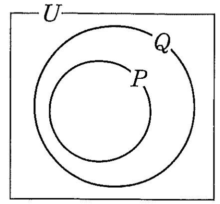
(1) $x=0 \Longrightarrow x^2=0$

(2) 自然数 n について

n は 6 の約数 $\Longrightarrow$ n は 12 の約数

対偶を利用する証明法

条件 p，q を満たすものの集合をそれぞれ P，Q とすると，命題「$p \Longrightarrow q$」が真であることは $P \subset Q$ が成り立つことである。



これは，$\overline{Q} \subset \overline{P}$ が成り立つことと同じである。

したがって，命題「$p \Longrightarrow q$」が真であることとその対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」が真であることは同じである。

命題と対偶

命題「$p \Longrightarrow q$」と，その対偶「$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$」とは，真偽が一致する。

例12 命題「$x+y \neq 5 \Longrightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$」の対偶「$x=2$ かつ $y=3 \Longrightarrow x+y=5$ 」は真である。

したがって，「$x+y \neq 5 \Longrightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$」は真である。

ある命題を証明するのに，その対偶を考えて証明することがある。

例題 1 **対偶を利用した証明**

整数 n について，n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ。

証明 この命題の対偶「n は奇数 $\Longrightarrow n^2$ は奇数」を証明すればよい。

n を奇数とするとき，ある整数 k を用いて，$n=2k+1$ と表される。

したがって

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

ここで，$2k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である。

以上より，対偶が証明されたから，もとの命題も成り立つ。

問13 整数 n について，n^2+1 が偶数ならば，n は奇数であることを，対偶を用いて証明せよ。

背理法

ある命題を証明するとき

「その命題が成り立たないと仮定すると，矛盾(むじゅん)が生じる。

したがって，その命題は成り立たなければならない。」

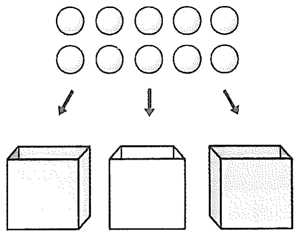
とする論法がある。このような論法を **背理法** という。

とくに，$p \Longrightarrow q$ の形の命題を背理法で証明するには，結論 q を否定して矛盾を導けばよい。

例題 2　　**背理法による証明 [1]**

10 個の球を青，黄，赤の 3 つの箱のどれかに入れる。
このとき，球が 4 個以上入っている箱があることを証明せよ。

考え方　球が 4 個以上入っている箱がないと仮定して，矛盾を導くことができればよい。



証明　青，黄，赤の箱に，10 個の球をそれぞれ a 個，b 個，c 個入れたとすると

$$a+b+c=10$$

が成り立つ。

球が 4 個以上入っている箱がないと仮定すると

$$a \leqq 3,\ b \leqq 3,\ c \leqq 3$$

が成り立つ。

よって　　$a+b+c \leqq 9$

となる。

これは，$a+b+c=10$ であることに矛盾する。

ゆえに，球が 4 個以上入っている箱がある。

問14　8 個の球を青，黄，赤の 3 つの箱のどれかに入れる。
このとき，入っている球が 2 個以下の箱があることを証明せよ。

例題 3　　**背理法による証明 [2]**

$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

証明　$\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}$ は有理数である。

このとき，1 以外の公約数をもたない自然数 m，n を用いて

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n} \quad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる。

① の分母をはらって，両辺を 2 乗すると

$$2n^2=m^2 \quad \cdots\cdots ②$$

この左辺は 2 で割り切れるから，m^2 は偶数である。

よって，m も偶数である。

ゆえに，m はある自然数 k を用いて，$m=2k$ と表される。

これを ② の右辺に代入して，両辺を 2 で割ると　　$n^2=2k^2$

となり，n^2 は偶数であるから，n も偶数である。

したがって，m，n はともに偶数となり，2 という公約数をもつことになる。

しかし，これは m，n が 1 以外の公約数をもたないということに矛盾する。

ゆえに，$\sqrt{2}$ は有理数ではない。

すなわち，$\sqrt{2}$ は無理数である。

問15　a，b が有理数であるとき

$$a+b\sqrt{2}=0 \quad ならば \quad a=b=0$$

であることを証明せよ。

ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。