

また、補集合について、次のド・モルガンの法則が成り立つ。

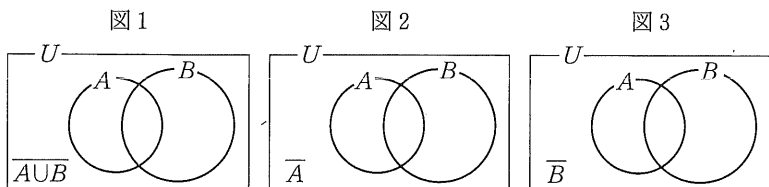
ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

例8 ド・モルガンの法則の第1式を確かめてみよう。

$\overline{A \cup B}$ は図1の色で示した部分である。

\overline{A} は図2, \overline{B} は図3の色で示した部分であるから, $\overline{A \cap B}$ は $\overline{A \cup B}$ に一致する。



問11 ド・モルガンの法則の第2式を, 上にならって確かめよ。

問12 $U = \{x | x \text{ は } 10 \text{ より小さい自然数}\}$ を全体集合とする。

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{1, 3, 4, 7\}$$

について, $\overline{A \cap B}$ を求めよ。

問題

1 $U = \{x | x \text{ は } 10 \text{ より小さい自然数}\}$ を全体集合とする。

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 3, 5, 7\}, C = \{7, 8, 9\}$$

について, 次の集合を求めよ。

- | | |
|---------------------------|--------------------------------------|
| (1) $\overline{A \cap B}$ | (2) $\overline{A \cap \overline{B}}$ |
| (3) $A \cap \overline{B}$ | (4) $A \cup B \cup C$ |
| (5) $A \cap B \cap C$ | (6) $A \cap B \cap \overline{C}$ |

2節 命題と論証

1 命題と条件

命題と条件

「 $\sqrt{4}$ は整数である」は正しいが, 「 $2+3=4$ 」は正しくない。一方, 「1000 は大きな数である」は正しいとも正しくないとも判断できない。

一般に, 正しいか正しくないかが定まる文や式を **命題** という。命題が正しいとき, その命題は **真** である, または, 成り立つといい, 正しくないとき, **偽** である, または, 成り立たないという。正しいか正しくないかが定まらない文や式は, 命題ではない。

- 例1 (1) 「 $3^2+4^2=5^2$ 」は命題であり, 真である。
 (2) 「7 は偶数である」は命題であり, 偽である。
 (3) 「正三角形は直角二等辺三角形より美しい三角形である」は, 正しいとも正しくないとも判断できないから, 命題ではない。

問1 次の命題の真偽を答えよ。

- 15 (1) $3^3+4^3+5^3=6^3$ (2) $\sqrt{(-3)^2}=-3$

「 $x < 0$ 」は, $x = -1$ のときは真であるが, $x = 2$ のときは偽であり, x の値によって真偽が決まる。このように, 変数を含む文や式で, その変数に値を代入したときに, 真偽が決まる文や式を **条件** という。条件は a, q などの文字で表すこともある。

例2 「 $x > -3$ 」は, x に 2 や -2 を代入したときには真となり, -3 や -4 を代入したときには偽となるから, 条件である。

問2 「 $x^2-2x-15=0$ 」が真となるような x の値を求めよ。

問3 「 $3x+12 > 0$ 」が真となるような x の値の範囲を求めよ。

命題「 $p \Rightarrow q$ 」

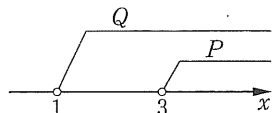
数学では、 p, q を条件として「 p ならば q である」という形の命題を
考えることが多い。この命題を \Rightarrow という記号を使って

$$「p \Rightarrow q」$$

と表す。このとき、 p をこの命題の**仮定**、 q を**結論**という。

例3 x に関する2つの条件を $p: x > 3, q: x > 1$ とするとき、
命題「 $x > 3$ ならば $x > 1$ 」が成り立つから、
命題「 $p \Rightarrow q$ 」は真である。

また、条件 p, q を満たすものの集合 P, Q は、数直線上ではそれぞれ右の図のよ
うになるから、 $P \subset Q$ が成り立っている。



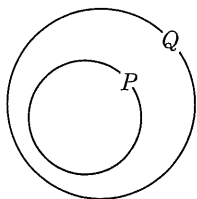
注意 p が条件「 $x > 1$ 」を表すとき、 $p: x > 1$ と書くことがある。

一般に、条件 p, q を満たすものの集合をそれぞれ
 P, Q で表すとき

命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真

であることは $P \subset Q$

が成り立つことと同じである。



また、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真で、かつ命題「 $q \Rightarrow p$ 」が真であるとき

$$「p \Leftrightarrow q」$$

と表す。これは、 $P = Q$ が成り立つことと同じである。

例4 自然数 n に関する2つの条件

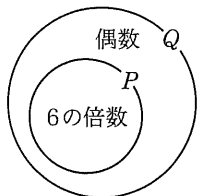
$p: n$ は6の倍数、 $q: n$ は偶数

を満たす n の集合をそれぞれ P, Q とすると

$$P \subset Q$$

が成り立つから、命題「 $p \Rightarrow q$ 」は真である。

しかし、 $P = Q$ が成り立たないから「 $p \Leftrightarrow q$ 」ではない。



問4 次の条件 p, q について、命題「 $p \Rightarrow q$ 」の真偽を、集合を考えること
によって答えよ。

(1) $p: -2 < x$ $q: x < 5$

(2) $p: -8 < x < -5$ $q: x < 1$

(3) $p: \text{自然数 } n \text{ は } 12 \text{ の倍数}$ $q: \text{自然数 } n \text{ は } 3 \text{ の倍数}$

(4) $p: \text{自然数 } n \text{ は } 72 \text{ の約数}$ $q: \text{自然数 } n \text{ は } 84 \text{ の約数}$

問5 条件を満たす x の集合を考えることによって

命題「 $-2 < x < 3 \Rightarrow p$ 」が真となる条件 p

命題「 $q \Rightarrow -2 < x < 3$ 」が真となる条件 q

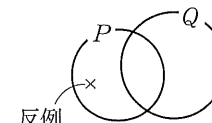
をそれぞれ次の中から選べ。

- ① $x < 5$ ② $-1 \leq x \leq 1$ ③ $0 \leq x \leq 3$

ある命題「 $p \Rightarrow q$ 」が偽であることを示すには

「 p であるのに q でない」

という例を1つあげればよい。このような例を、そ



の命題に対する**反例**という。

例5 命題「 $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ 」には、 $x = -2$. という反例があるから、
この命題は偽である。

問6 次の命題の真偽を答えよ。また、偽であるときは反例をあげよ。

(1) $5x = 15 \Rightarrow x = 3$

(2) $x^2 = 2x \Rightarrow x = 2$

(3) 自然数 n は素数 \Rightarrow 自然数 n は奇数

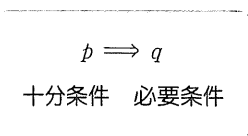
必要条件と十分条件

2つの条件 p, q について、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が成り立つとき

p は q であるための**十分条件**である

q は p であるための**必要条件**である

という。



例6 x に関する2つの条件 $p: x = 2, q: x^2 = 4$ について、「 $p \Rightarrow q$ 」は成り立つが、「 $q \Rightarrow p$ 」は成り立たない。
よって

- p は q であるための十分条件であるが、必要条件ではない。
- q は p であるための必要条件であるが、十分条件ではない。

問7 次の□の中に、必要または十分のうち、適切なものを入れよ。

- $x > 1$ は $x > 0$ であるための□条件である。
- $x < 3$ は $-1 < x < 2$ であるための□条件である。
- $x = 6$ は $x^2 = 36$ であるための□条件である。
- 自然数 n が偶数であることは $n = 4$ であるための□条件である。¹⁰

2つの条件 p, q について、「 $p \Leftrightarrow q$ 」であるとき

p は q であるための**必要十分条件**である

という。このとき、 q は p であるための必要十分条件でもある。また、 p と q は**同値**であるともいう。

例7 $p: \triangle ABC$ は長さの等しい3辺をもつ ¹⁵

$q: \triangle ABC$ は大きさの等しい3つの内角をもつ

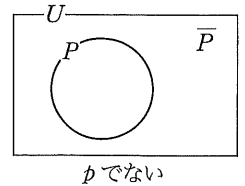
について、2つの命題「 $p \Rightarrow q$ 」, 「 $q \Rightarrow p$ 」がともに成り立つから、「 $p \Leftrightarrow q$ 」であり、 p と q は同値である。

問8 次の条件 p, q について、 p は q であるための必要条件である、十分条件である、必要十分条件である、または、必要条件でも十分条件でもない、²⁰
のうち最も適切なものを答えよ。

- $p: x^2 = 5$ $q: x = \sqrt{5}$
 - $p: 整数 a, b$ は同符号である。 $q: 整数 a, b$ の積は正である。
 - $p: 自然数 n$ は6の倍数である。 $q: 自然数 n$ は3の倍数である。
 - $p: 四角形 F$ の内角の大きさはすべて等しい。 ²⁵
- $q: 四角形 F$ の辺の長さはすべて等しい。

条件の否定とド・モルガンの法則

条件 p に対し「 p でない」という条件を p の**否定**といい、 \bar{p} で表す。 \bar{p} を満たすものの集合は、 p を満たすものの集合 P の補集合 \bar{P} となる。



例8 (1) 条件「 $x > 1$ 」の否定は、「 $x \leq 1$ 」である。

(2) 条件「自然数 n は奇数」の否定は、「自然数 n は偶数」である。

問9 次の条件の否定を述べよ。

- $x \leq -2$
- 自然数 n は3で割り切れる。

条件 p, q を満たすものの集合をそれぞれ P, Q とすると、「 p かつ q 」,

¹⁰ 「 p または q 」を満たすものの集合は、それぞれ $P \cap Q, P \cup Q$ である。

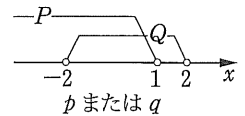
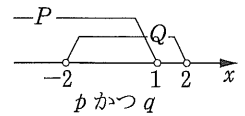
例9 条件 $p: x < 1, q: -2 < x < 2$ において

条件「 p かつ q 」は「 $-2 < x < 1$ 」

であり

条件「 p または q 」は「 $x < 2$ 」

である。¹⁵



問10 次の条件を満たす x の集合は、数直線上ではどのような範囲になるか。

- $x < 3$ かつ $x < 5$
- $x \geq 2$ または $-4 < x < 5$

54ページの集合に関するド・モルガンの法則から、2つの条件 p, q について次の法則が導かれる。

● ド・モルガンの法則 ●

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q}, \quad \overline{p \text{ または } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ かつ } \bar{q}$$

例10 「 $x < 2$ かつ $y \geq 5$ 」の否定は「 $x \geq 2$ または $y < 5$ 」である。

「 $x = 2$ または $y = 5$ 」の否定は「 $x \neq 2$ かつ $y \neq 5$ 」である。

問11 次の条件の否定を述べよ。

- $x \geq 1$ かつ $y \leq 4$
- $x \leq 5$ または $y > 8$

2 論証

命題の逆・裏・対偶

命題「 $p \Rightarrow q$ 」と関連する命題を考えてみよう。

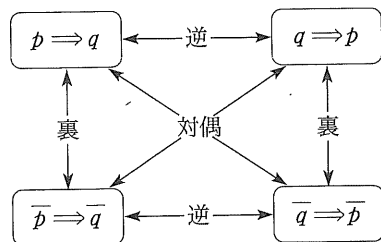
命題「 $p \Rightarrow q$ 」に対して

命題「 $q \Rightarrow p$ 」を「 $p \Rightarrow q$ 」の**逆**

命題「 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ 」を「 $p \Rightarrow q$ 」の**裏**

命題「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」を「 $p \Rightarrow q$ 」の**対偶**

という。



例11 命題「 $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ 」について

この命題の逆は「 $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ 」

この命題の裏は「 $x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ 」

この命題の対偶は「 $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ 」

である。これらの命題の真偽を考えると、もとの命題と対偶は真、逆と裏は $x = -2$ という反例をもつから、偽である。

例 11 から次のことがいえる。

命題が真であっても、その命題の**逆は真とは限らない**。

また、**裏も真とは限らない**。

問12 次の命題の逆、裏、対偶をつくり、その真偽を答えよ。

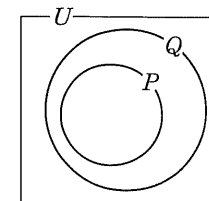
(1) $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$

(2) 自然数 n について

n は 6 の約数 $\Rightarrow n$ は 12 の約数

対偶を利用する証明法

条件 p, q を満たすものの集合をそれぞれ P, Q とすると、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であることは $P \subset Q$ が成り立つことである。



これは、 $\bar{Q} \subset \bar{P}$ が成り立つことと同じである。

したがって、命題「 $p \Rightarrow q$ 」が真であることとその対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」が真であることは同じである。

命題と対偶

命題「 $p \Rightarrow q$ 」と、その対偶「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」とは、真偽が一致する。

例12 命題「 $x + y \neq 5 \Rightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$ 」の

対偶「 $x = 2$ かつ $y = 3 \Rightarrow x + y = 5$ 」は真である。

したがって、「 $x + y \neq 5 \Rightarrow x \neq 2$ または $y \neq 3$ 」は真である。

ある命題を証明するのに、その対偶を考えて証明することがある。

例題

対偶を利用した証明

1 整数 n について、 n^2 が偶数ならば、 n は偶数であることを証明せよ。

証明 この命題の対偶「 n は奇数 $\Rightarrow n^2$ は奇数」を証明すればよい。

n を奇数とすると、ある整数 k を用いて、 $n = 2k + 1$ と表される。

したがって

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ここで、 $2k^2 + 2k$ は整数であるから、 n^2 は奇数である。

以上より、対偶が証明されたから、もとの命題も成り立つ。

問13 整数 n について、 $n^2 + 1$ が偶数ならば、 n は奇数であることを、対偶を用いて証明せよ。