1 $\int_0^1 f(t)dt=k$ (定数) ……① とおくと，$f(x)=x+2k$ ……② と表される。

①，②から

$$k=\int_0^1(t+2k)dt=\left[\frac{t^2}{2}+2kt\right]_0^1=\frac{1}{2}+2k$$

ゆえに　$k=-\frac{1}{2}$

よって，②から　$f(x)=x-1$

2 (1) $f'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x(t^2+2t-3)dt=x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

また　$f(x)=\int_a^x(t^2+2t-3)dt=\left[\frac{t^3}{3}+t^2-3t\right]_a^x$

$$=\frac{x^3}{3}+x^2-3x-\frac{a^3}{3}-a^2+3a$$

ゆえに

$$f(-3)=\frac{(-3)^3}{3}+(-3)^2-3(-3)-\frac{a^3}{3}-a^2+3a=-\frac{a^3}{3}-a^2+3a+9,$$

$$f(1)=\frac{1^3}{3}+1^2-3\cdot1-\frac{a^3}{3}-a^2+3a=-\frac{a^3}{3}-a^2+3a-\frac{5}{3}$$

よって，$f(x)$ は $x=-3$ で極大値 $-\frac{a^3}{3}-a^2+3a+9$，

$x=1$ で極小値 $-\frac{a^3}{3}-a^2+3a-\frac{5}{3}$

をとる。

(2) $\int_a^x f(t)dt=x^3-6x^2+12x-8$ ……① とする。

①の両辺を x で微分すると　$f(x)=3x^2-12x+12$

また，①の両辺に $x=a$ を代入すると

$$0=a^3-6a^2+12a-8$$

すなわち　$(a-2)^3=0$

したがって　$a=2$

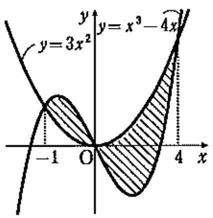
3 (1) 2曲線の共有点の x 座標は，方程式 $x^3-4x=3x^2$ の実数解である。

$x^3-3x^2-4x=0$ から

$x(x+1)(x-4)=0$

ゆえに　$x=-1,\ 0,\ 4$

求める面積を S とすると



$$S=\int_{-1}^0\{(x^3-4x)-3x^2\}dx+\int_0^4\{3x^2-(x^3-4x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^0(x^3-3x^2-4x)dx-\int_0^4(x^3-3x^2-4x)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2\right]_{-1}^0-\left[\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2\right]_0^4$$

$$=-\left(\frac{1}{4}+1-2\right)-(64-64-32)$$

$$=\frac{131}{4}$$

(2) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ から

$f'(x)=3x^2+4x-5$

よって　$f(1)=-8,\ f'(1)=2$

ゆえに，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1,\ f(1))$ における接線 ℓ の方程式は

$y-(-8)=2(x-1)$

すなわち　$y=2x-10$

曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ の共有点の x 座標は，

$x^3+2x^2-5x-6=2x-10$

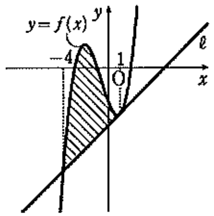
の実数解である。

$x^3+2x^2-7x+4=0$ から

$(x-1)^2(x+4)=0$

よって　$x=1,\ -4$

求める面積を S とすると



$$S=\int_{-4}^1\{(x^3+2x^2-5x-6)-(2x-10)\}dx$$

$$=\int_{-4}^1(x^3+2x^2-7x+4)dx$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_{-4}^1$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{7}{2}+4\right)-\left(64-\frac{128}{3}-56-16\right)$$

$$=\frac{625}{12}$$

参考　3次関数 $y=f(x)$ (x^3 の係数が $a>0$) のグラフと直線 $y=g(x)$ が点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ で接し，それと異なる点 $(\beta,\ f(\beta))$ で交わるとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

[1] $\alpha<\beta$ のとき

$$S=\int_\alpha^\beta\{g(x)-f(x)\}dx=-\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

[2] $\beta<\alpha$ のとき

$$S=\int_\beta^\alpha\{f(x)-g(x)\}dx=\int_\beta^\alpha a(x-\alpha)^2(x-\beta)dx=\frac{a}{12}(\beta-\alpha)^4$$

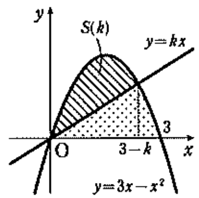
本問は，$a=1$，$\alpha=1$，$\beta=-4$ の場合である。

4 放物線 $y=3x-x^2$ と直線 $y=kx$ で囲まれた部分の面積を $S(k)$ とする。

放物線と直線の交点の x 座標は，方程式 $3x-x^2=kx$ を解いて　$x=0,\ 3-k$

面積を2等分できるためには　$0<3-k<3$

すなわち　$0<k<3$ ……①



ここで　$S(k)=\int_0^{3-k}\{(3x-x^2)-kx\}dx$

$$=-\int_0^{3-k}x\{x-(3-k)\}dx$$

$$=\frac{(3-k)^3}{6}$$

放物線と x 軸 (直線 $y=0\cdot x$) で囲まれた部分の面積は $S(0)$ であるから，面積を2等分するとき

$2S(k)=S(0)$　すなわち　$2\cdot\frac{(3-k)^3}{6}=\frac{3^3}{6}$

よって　$(3-k)^3=\frac{27}{2}$　　すなわち　$3-k=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$

したがって　$k=3\left(1-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$　　これは①を満たす。

5 x 軸に垂直な直線は適さないから，点 $(1,\ 2)$ を通る直線の方程式は $y=m(x-1)+2$ とおける。

放物線とこの直線の交点の x 座標は，方程式

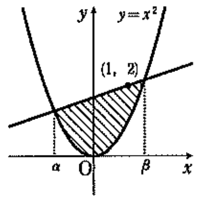
$x^2=m(x-1)+2$　すなわち　$x^2-mx+m-2=0$ ……①

の実数解である。2次方程式①の判別式を D とすると

$D=(-m)^2-4(m-2)=m^2-4m+8=(m-2)^2+4>0$

よって，①は異なる2つの実数解をもつ。

それらを $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると



$$S=\int_\alpha^\beta\{m(x-1)+2-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

ここで　$\beta-\alpha=\frac{m+\sqrt{D}}{2}-\frac{m-\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}=\sqrt{(m-2)^2+4}$

よって　$S=\frac{1}{6}\{\sqrt{(m-2)^2+4}\}^3$

したがって，S は $m=2$ で最小となり，求める直線の方程式は

$y=2(x-1)+2$　　すなわち　$y=2x$

6 (1) $y=-x(x-2)$，$y=tx$ から y を消去すると

$-x(x-2)=tx$

すなわち　$x\{x-(2-t)\}=0$

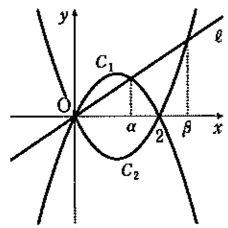
よって　$\alpha=2-t$

$y=x(x-2)$，$y=tx$ から y を消去すると

$x(x-2)=tx$

すなわち　$x\{x-(2+t)\}=0$

よって　$\beta=2+t$



(2) $S_1(t)=\int_0^\alpha\{-x(x-2)-tx\}dx=-\int_0^\alpha x(x-\alpha)dx$

$$=\frac{1}{6}(\alpha-0)^3=\frac{1}{6}(2-t)^3$$

(3) $S_2(t)=\int_0^\beta\{tx-x(x-2)\}dx=-\int_0^\beta x(x-\beta)dx$

$$=\frac{1}{6}(\beta-0)^3=\frac{1}{6}(2+t)^3$$

$S_1(t)$ と $S_2(t)$ の比が $1:8$ のとき，$8S_1(t)=S_2(t)$ であるから　$8(2-t)^3=(2+t)^3$

よって　$(3t-2)(3t^2-12t+28)=0$　　t は実数であるから　$t=\frac{2}{3}$

これは $0<t<2$ を満たす。

7 (1)　$y=x^2$ から　　$y'=2x$

L と C の接点の x 座標を $t\ (t \neq 0)$ とし，この点での共通の接線を m とすると，m の傾きは　　$2t$

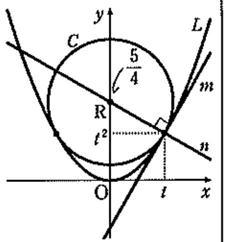
点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $(t,\ t^2)$ を通る直線を n とすると，

n の傾きは　　$\dfrac{t^2-\frac{5}{4}}{t-0}=\dfrac{4t^2-5}{4t}$

直線 m，n は直交するから　　$2t\cdot\dfrac{4t^2-5}{4t}=-1$

整理すると　　$t^2=\dfrac{3}{4}$　　　よって　　$t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって，接点の座標は　　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$



(2)　点 $\mathrm{R}\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$ の距離は　　$\sqrt{\left(0-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{3}{4}\right)^2}=1$

よって，円 C の方程式は　　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$

(3)　右の図のように，接点を A とすると，

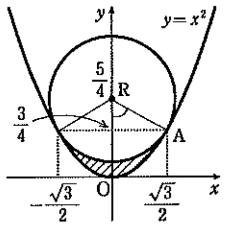
$\sin\angle\mathrm{ORA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より　　$\angle\mathrm{ORA}=\dfrac{\pi}{3}$

よって，求める面積は

$$2\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx\right\}$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{3}$$



別解　(1)，(2)　円の方程式を $x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=r^2\ (r>0)$ とする。

これと $y=x^2$ から x^2 を消去すると　　$y+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=r^2$

よって　　$16y^2-24y+25-16r^2=0$　……①

円と放物線が異なる 2 点で接する条件は，① が重解をもつことである。

すなわち，① の判別式を D とすると　　$D=0$

$$\frac{D}{4}=(-12)^2-16(25-16r^2)=256(r^2-1)$$

よって　　$r^2=1$　　　$r>0$ であるから　　$r=1$

このとき，① の重解は　　$x=\dfrac{-(-12)}{16}=\dfrac{3}{4}$

$x^2=\dfrac{3}{4}$ より　　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　接点の座標は　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{4}\right)$

円の方程式は　$x^2+\left(y-\dfrac{5}{4}\right)^2=1$

8 (1)　C_1：$y=x^2$ において　　$y'=2x$

よって，ℓ と C_1 との接点を $(a,\ a^2)$ とすると，ℓ の方程式は　　$y-a^2=2a(x-a)$

すなわち　　$y=2ax-a^2$

ℓ は C_2 と接するから，方程式　　$2ax-a^2=x^2-6x+15$

すなわち　$x^2-2(a+3)x+a^2+15=0$　……①

は重解をもつ。

① の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2-1\cdot(a^2+15)=6(a-1)$$

$D=0$ であるから　　$a=1$

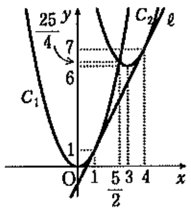
よって，ℓ の方程式は　　$y=2x-1$

また，ℓ と C_1 の接点は　　$(1,\ 1)$

ℓ と C_2 の接点は，x 座標が ① の重解 $\dfrac{2(1+3)}{2\cdot1}=4$ であるから　　$(4,\ 7)$

C_1 と C_2 の交点は，方程式 $x^2=x^2-6x+15$ を解いて，$x=\dfrac{5}{2}$ から　　$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{25}{4}\right)$

C_2：$y=(x-3)^2+6$ であるから，C_1，C_2 および ℓ を図示すると，右の図のようになる。



(2)　求める面積を S とすると

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}\{x^2-(2x-1)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{x^2-6x+15-(2x-1)\}dx$$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2dx=\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^4=\frac{9}{4}$$