高校準備授業②　発展クラス

1 (1) 偽 (反例：$n=6$)

$n=6$ のとき，n は偶数であるが，n は 4 の倍数でない。

(2) 偽 (反例：$n=5$)

$n=5$ のとき，n は奇数であるが，$10n+1=51$ は $51=3\cdot17$ であるから素数でない。

2 (1) (反例) $x=-1,\ y=-1$

$xy>0$ であるが，$x>0$ または $y>0$ を満たさない。

よって，偽。

(2) (反例) $x=3,\ y=0$

$xy=0$ であるが，$x=0$ かつ $y=0$ を満たさない。

よって，偽。

(3) (反例) $x=3,\ y=-1$

$x+y>0$ であるが，$x>0$ かつ $y>0$ を満たさない。

よって，偽。

(4) (反例) $x=2,\ y=0$

$x+y=2$ かつ $xy=0$ であるが，$x=0$ かつ $y=2$ を満たさない。

よって，偽。

3 (1) 偽 (反例：$n=6$)

$n=6$ のとき $n^2=36$ で 4 の倍数であるが，n は 4 の倍数でない。

(2) $n^2+n=n(n+1)$

n と $n+1$ のどちらかは 2 の倍数であるから，$n(n+1)$ は 2 の倍数である。

また，n は 3 の倍数であるから，$n(n+1)$ は 3 の倍数である。

よって，$n(n+1)$ は 2 の倍数かつ 3 の倍数であるから，6 の倍数である。

ゆえに，与えられた命題は　真

別解 $n=3k$ (k は整数) とすると

$$n^2+n=(3k)^2+3k=9k^2+3k=6k^2+3k(k+1)$$

k と $k+1$ のどちらかは 2 の倍数であるから，$k(k+1)$ は 2 の倍数である。

よって，$k(k+1)=2l$ (l は整数) とすると

$$n^2+n=6k^2+3\cdot2l=6(k^2+l)$$

k^2+l は整数であるから，$6(k^2+l)$ は 6 の倍数である。

ゆえに，n^2+n は 6 の倍数である。

したがって，与えられた命題は　真

4 (1) $x=2$ のとき　$x^2-x-2=2^2-2-2=0$

よって，「$x=2 \Longrightarrow x^2-x-2=0$」は真。

また，$x^2-x-2=0$ を解くと　$x=-1,\ 2$

よって，「$x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=2$」は偽。　(反例：$x=-1$)

したがって　十分条件であるが必要条件でない

(2) 「△ABC∽△PQR $\Longrightarrow$ △ABC≡△PQR」は偽，

「△ABC≡△PQR $\Longrightarrow$ △ABC∽△PQR」は真。

したがって　必要条件であるが十分条件でない

(3) $x=y=2$ のとき　$2x-y=2\cdot2-2=2,\ 2y-x=2\cdot2-2=2$

よって，「$x=y=2 \Longrightarrow 2x-y=2y-x=2$」は真。

$2x-y=2,\ 2y-x=2$ を連立方程式として解くと　$x=2,\ y=2$

よって，「$2x-y=2y-x=2 \Longrightarrow x=y=2$」は真。

したがって　必要十分条件である

(4) 「$xy\neq0 \Longrightarrow x\neq0$」は真。

$x\neq0,\ y=0$ のとき $xy=0$

よって，「$x\neq0 \Longrightarrow xy\neq0$」は偽。

したがって　十分条件であるが必要条件でない

5 (1) $xy=yz=zx=0 \Longrightarrow x=y=z=0$ は偽。反例：$x=y=0,\ z=1$

$x=y=z=0 \Longrightarrow xy=yz=zx=0$ は真。

よって　(イ)

(2) $x>2 \Longrightarrow x^2\neq1$ は真。

$x^2\neq1 \Longrightarrow x>2$ は偽。反例：$x=0$

よって　(ウ)

(3) $x+y>0 \Longrightarrow xy>0$ は偽。反例：$x=2,\ y=-1$

$xy>0 \Longrightarrow x+y>0$ も偽。反例：$x=-1,\ y=-1$

よって　(エ)

6 (1) $a=3$ かつ $b=2$ のとき　$a+b=3+2=5$

よって，「$a=3$ かつ $b=2 \Longrightarrow a+b=5$」は真である。

$a=1,\ b=4$ のとき，$a+b=5$ であるが，$a=3$ かつ $b=2$ でない。

よって，「$a+b=5 \Longrightarrow a=3$ かつ $b=2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(2) $x=3$ のとき　$x^2-6x+9=3^2-6\cdot3+9=0$

よって，「$x=3 \Longrightarrow x^2-6x+9=0$」は真である。

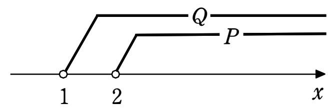
$x^2-6x+9=0$ を解くと　$(x-3)^2=0$　ゆえに　$x=3$

よって，「$x^2-6x+9=0 \Longrightarrow x=3$」は真である。

したがって，必要十分条件である。

(3) $P=\{x \mid x>2\},\ Q=\{x \mid x>1\}$ とする。

$P,\ Q$ は右の図のようになり　$P\subset Q$

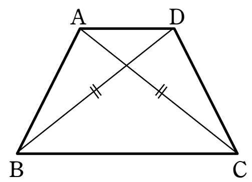


よって，「$x>2 \Longrightarrow x>1$」は真であり，

「$x>1 \Longrightarrow x>2$」は偽である。

したがって，十分条件であるが必要条件ではない。

(4) 右の図のような AD∥BC，AB＝DC の等脚台形において，2 本の対角線の長さは等しいが，長方形でない。



よって，「2 本の対角線の長さが等しい $\Longrightarrow$ 長方形である」は偽である。

また，「長方形である $\Longrightarrow$ 2 本の対角線の長さは等しい」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

(5) $a=1,\ b=2,\ c=-1$ のとき，$a<b$ であるが，$ac<bc$ でない。

よって，「$a<b \Longrightarrow ac<bc$」は偽である。

$a=-1,\ b=-2,\ c=-1$ のとき，$ac<bc$ であるが，$a<b$ でない。

よって，「$ac<bc \Longrightarrow a<b$」は偽である。

したがって，必要条件でも十分条件でもない。

(6) 12 は 4 かつ 6 の倍数であるが，24 の倍数でない。

よって，「4 かつ 6 の倍数 $\Longrightarrow$ 24 の倍数」は偽である。

また，「24 の倍数 $\Longrightarrow$ 4 かつ 6 の倍数」は真である。

したがって，必要条件であるが十分条件ではない。

7 (1) 否定は　「ある素数 n について，n は偶数である。」

2 は素数であり，かつ偶数であるから，もとの命題は偽，否定は真である。

(2) 否定は　「すべての実数 x について　$x^2>0$」

$x=0$ のとき $x^2=0$ となるから，もとの命題は真，否定は偽である。

8 (1) $m,\ n$ の少なくとも一方は偶数

(2) $m,\ n$ はともに 3 の倍数でない

(3) $x\leqq0$ かつ $y>0$

(4) $x\neq0$ または $y=0$

9 もとの命題は偽である。(反例：$x=5,\ y=3$)

逆は　「$x=3$ かつ $y=5$」$\Longrightarrow xy=15$　これは真である。

対偶は　「$x\neq3$ または $y\neq5$」$\Longrightarrow xy\neq15$

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=5,\ y=3$)

裏は　$xy\neq15 \Longrightarrow$「$x\neq3$ または $y\neq5$」

逆が真であるから，裏も真である。

10 (1) もとの命題は真である。

逆は　「平行四辺形ならば，長方形である。」　これは偽である。

対偶は　「平行四辺形でないならば，長方形でない。」

もとの命題が真であるから，対偶も真である。

裏は　「長方形でないならば，平行四辺形でない。」

逆が偽であるから，裏も偽である。

(2) もとの命題は偽である。(反例：$x=2$)

逆は　$(x-1)(x-2)\neq0 \Longrightarrow x\neq1$

対偶は　$(x-1)(x-2)=0 \Longrightarrow x=1$

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=2$)

裏は　$x=1 \Longrightarrow (x-1)(x-2)=0$　これは真である。

裏が真であるから，逆も真である。

(3) もとの命題は偽である。(反例：$x=-1,\ y=2$)

逆は　$x+y<0 \Longrightarrow$「$x<0$ または $y<0$」

対偶は　$x+y\geqq0 \Longrightarrow$「$x\geqq0$ かつ $y\geqq0$」

もとの命題が偽であるから，対偶も偽である。(反例：$x=-1,\ y=2$)

裏は　「$x\geqq0$ かつ $y\geqq0$」$\Longrightarrow x+y\geqq0$　これは真である。

裏が真であるから，逆も真である。

注意 (2)，(3) では，逆の真偽は判定しにくいため，まず裏の真偽を調べた。

11 対偶「$x=2$ かつ $y=1$」$\Longrightarrow$「$x^2+y^2=5$ かつ $x-y=1$」を証明する。

$x=2$ かつ $y=1$ のとき

$$x^2+y^2=2^2+1^2=5,\quad x-y=2-1=1$$

よって，対偶は真である。

したがって，もとの命題は真である。

$\boxed{12}$ (1)　対偶「n が奇数ならば，n^3+1 は偶数である。」を証明する。

n が奇数のとき，ある整数 k を用いて $n=2k+1$ と表される。

このとき　$n^3+1=(2k+1)^3+1$

$=8k^3+12k^2+6k+2$

$=2(4k^3+6k^2+3k+1)$

$4k^3+6k^2+3k+1$ は整数であるから，n^3+1 は偶数である。

よって，対偶は真である。

したがって，もとの命題は真である。

(2)　対偶「m，n がともに奇数またはともに偶数ならば，m^2+n^2 は偶数である。」を証明する。

[1]　m，n がともに奇数のとき，ある整数 k，l を用いて $m=2k+1$，$n=2l+1$ と表される。

このとき　$m^2+n^2=(2k+1)^2+(2l+1)^2$

$=(4k^2+4k+1)+(4l^2+4l+1)$

$=4k^2+4l^2+4k+4l+2$

$=2(2k^2+2l^2+2k+2l+1)$

$2k^2+2l^2+2k+2l+1$ は整数であるから，m^2+n^2 は偶数である。

[2]　m，n がともに偶数のとき，ある整数 p，q を用いて $m=2p$，$n=2q$ と表される。

このとき　$m^2+n^2=(2p)^2+(2q)^2=4p^2+4q^2$

$=2(2p^2+2q^2)$

$2p^2+2q^2$ は整数であるから，m^2+n^2 は偶数である。

[1]，[2] から，対偶は真である。

したがって，もとの命題は真である。

$\boxed{13}$ (1)　対偶「n が 5 の倍数でないならば，n^2 は 5 の倍数でない」を証明する。

n が 5 の倍数でないとき，n は $5k+1$，$5k+2$，$5k+3$，$5k+4$ (k は整数) のいずれかで表される。

[1]　$n=5k+1$ のとき

$n^2=(5k+1)^2=25k^2+10k+1=5(5k^2+2k)+1$

[2]　$n=5k+2$ のとき

$n^2=(5k+2)^2=25k^2+20k+4=5(5k^2+4k)+4$

[3]　$n=5k+3$ のとき

$n^2=(5k+3)^2=25k^2+30k+9=5(5k^2+6k+1)+4$

[4]　$n=5k+4$ のとき

$n^2=(5k+4)^2=25k^2+40k+16=5(5k^2+8k+3)+1$

[1]～[4] のいずれの場合も，n^2 は 5 の倍数でない。

よって，対偶は真である。

したがって，n^2 が 5 の倍数ならば，n は 5 の倍数である。

(2)　$\sqrt{5}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，1 以外に正の公約数をもたない 2 つの自然数 a，b を用いて　$\sqrt{5}=\dfrac{a}{b}$　と表される。

このとき　$a=\sqrt{5}\,b$

両辺を 2 乗すると　$a^2=5b^2$　…… ①

よって，a^2 は 5 の倍数である。

ゆえに，(1) より a も 5 の倍数であるから，ある自然数 c を用いて

$a=5c$　…… ②　と表される。

② を ① に代入すると　$25c^2=5b^2$

よって　$b^2=5c^2$

ゆえに，b^2 は 5 の倍数であるから，(1) より b も 5 の倍数である。

よって，a と b は正の公約数 5 をもつ。

このことは，a と b が 1 以外に正の公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{5}$ は無理数である。